THE

PRINCESS OF WALES SARASVATI BHAVANA TEXTS SERIES

(Published under the authority of the Government of the United Provinces)

General Editor

DR. MANGAL DEVA SHASTRI,
M.A., D. PHIL. (OXON),
PRINCIPAL,
GOVERNMENT SANSKRIT COLLEGE,
BENARES

No. 80

PART II

CHALARĀŚIKALANA

म० म० सुधाकरद्विवेदिविरचितं

चलराशिकलनम्

पञ्चमाध्यायतोऽवशिष्टभागः

THE

CHALARĀŚIKALANA

BY

M. M. Sudhakara Dwivedi

PART II

Edited

BY

PANDIT BALDEVA MISHRA
JYAUTISHACHARYA JYAUTISH TIRTH
SARASVATI BHAVANA
BENARES.

1943

मुद्रक—
माधव विष्णु पराड़कर,
ज्ञानमण्डल यन्त्रालय, काशी। १९९९

पुनर्निवेदनम् ।

ग्रन्थस्यास्य प्रथमभागस्य प्रकाशनावसरे मया निवेदितं यद्ग्रन्थान्ते विशेष-प्रपञ्चः प्रदर्शितो भविष्यति । परञ्च महादुस्तरेऽस्मिन्महायुद्धकाले पत्रप्राप्त्यभावाद्विशेषलेखनादिदानीं विरम्यते । युरोपीयगणिते 'लिमिट' शब्देनाव्यक्तस्य यन्मानं कल्प्यते तत्रास्मिन्ग्रन्थे एकधैव तन्मानं शून्यं मत्वा गणितं प्रदर्शितम् । एवं स्वरूपाणां लेखनेऽपि किञ्चिद्वैशिष्ट्यमस्ति । सर्वमिदं कालान्तरे चलराशिकलन-परिशिष्टरूपेण प्रकाशितं भविष्यतीत्याशासे ।

अत्र विशेषत इदं कथनीयमस्ति यद्गणितविद्याप्रचाराय विद्यारसिकैः काशिकराजकीयसंस्कृतविद्यालयाध्यक्षैः श्रीमद्भिर्डाक्टरमङ्गलदेवशास्त्रिवर्यैर्यया शुभेच्छयैतादृशदुर्लभपुस्तकप्रकाशनाय यतितं तत्रास्माकं दौर्भाग्यात्प्रायो मूलच्छेद एव दृश्यते गणितविषयकपरीक्षाया अपाकरणात् । तथापि दृढमाशासे यद्विश्वेश्वर-कृपया तादृशो गणितप्रकर्षकालः समागमिष्यति यदा पुनरपि बह्वादरेण ग्रन्थरत्नमिदं काशिकराजकीयसंस्कृतपरीक्षासु पाठ्यरूपेण स्वीकरिष्यते इति निगदति

काश्यां सरस्वतीभवने
१-३-४३

बलदेवमिश्रो
ज्यौतिषाचार्यः

पञ्चमाध्याय ५।

षष्ठाध्याय ६।

सप्तमाध्याय ७।

अष्टमाध्याय ८ ।

अष्टमाध्याय ८।

प्रक्रम पृष्ठ

नवमाध्याय ९।

दशमाध्याय १० ।

इति विशेषवर्णन।

विषयसूचनिका (Contents)



पञ्चमाध्याय।

दो वा अनेक चलराशियों के वश से चलानयन।

वा द्विगुण चल।

५८। पिछले अध्यायों में उन चलानयनों का वर्णन है जिन में एक ही चल है अर्थात् जब तात्कालिक सम्बन्ध फ(य) इस चाल का है तब इस के चलानयन का वर्णन हो चुका। परन्तु चलनकलन से जहाँ दो चलराशि वा अनेक चलराशि के फल हों वहाँ सिद्ध है कि

स = फ(य,र) तो $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}}$ = फा(य,र) वा स = फ(य,र,ल) तो

$\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तायतारताल}}$ = फा(य,र,ल) इस लिये अब इस अध्याय का मुख्य उद्देश्य यह है कि फा(य,र) वा फा(य,र,ल) परसे स के मान को लेआनेका नियम जानना।

५९। चलनकलन के (६)वें अध्याय से प्रसिद्ध है कि

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय तार}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right] = \frac{\text{तास}_1}{\text{ताय}} = \text{फ}(\text{य},\text{र})$$

इस लिये $\text{स}_1 = \int$फ(य,र)ताय यह ठीक पिछले अध्यायों से सिद्ध हो जायगा यदि फल में र को स्थिर मान लो। मानो कि

$\int$फ(य,र) ताय = फा(य,र) इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{तार}}$ = फा(य,र)

$\therefore$ स = $\int$ फा(य,र) तार यह भी पिछले अध्यायों से प्रसिद्ध हो जायगा यदि इस में य को स्थिर मानो।

यह भी विचारो तो जिस तरह से $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}}$ इस का मान चलनकलन से आता है ठीक उस के विपरीत क्रिया से यहाँ स आता है।

६०। चलनकलन के (६)वें अध्याय से सिद्ध है कि $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}}$

इस लिये

स = $\int$ फा(य,र)तार = $\int$ { $\int$ फ(य,र)ताय } तार वा,स = $\int$ { फ(य,र)तार } ताय
इस तरह से दो रीति स के जानने के लिये उत्पन्न होती है कि फ(य,र) में पहले र को स्थिर मान ताय के वश से चल ज्ञान करो फिर इस चल में य को स्थिर मान तार के वश से नया चल निकालो तो स का मान होगा । वा पहले य को स्थिर मान तार के वश से चल निकालो फिर इस में र को स्थिर मान ताय के वश से चलज्ञान करो तो यही स का मान होगा ।

इस प्रकार से स का दो मान आया । कल्पना करो कि एक मान श, दूसरा श_1 है तो विपरीत क्रिया से

$$\frac{\text{ता}^2\text{श}_1}{\text{ताय तार}} = \text{फ (य,र)} = \frac{\text{ता}^2\text{श}}{\text{तार ताय}} \text{ अन्तर करने से}$$

$$0 = \frac{\text{ता}^2\text{श}_1}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{ता}^2\text{श}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\text{ताश}_1}{\text{तार}} - \frac{\text{ताश}}{\text{तार}}\right] = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\text{ताश}_2}{\text{तार}}\right]$$

यदि श_1—श = श_2 इस लिये $\frac{\text{ताश}_2}{\text{तार}}$ यह य का कोई फल नहीं हो सकता सेवाय स्थिराङ्क के क्योंकि $\frac{\text{ता(स्थि)}}{\text{ताय}}$ यही शून्य के समान होता है इस लिये $\frac{\text{ताश}_2}{\text{तार}}$ = फि (र) $\therefore$ श_2 = $\int$ फि (र) तार + स्थि इस में भी स्थिराङ्क य का कोई फल होगा क्योंकि फि (र) में य को स्थिर माना है । मानो कि स्थि = फी(य)
इस लिये श_2 = श_1—श = $\int$ फि (र) तार + फी (य) = फा(र) + फी (य)

यदि $\int$ फि (र) तार = फा (र)

इस से यह सिद्ध होता है कि दोनों विधियों से जो दो प्रकार के स उत्पन्न होते हैं उनका अन्तर दो फलों के योग तुल्य है जिन में एक केवल य का और दूसरा केवल र का फल है ।

६१ । पिछले प्रक्रम में जो स = $\int$ { $\int$ फ(य,र)ताय } तार यह है इस में यदि { } इस को उड़ा दें तो $\int\int$ फ(य,र)तायतार ऐसा होगा । अब यदि $\int\int$ फ(य,र)तायतार इस का अर्थ ऐसा समझें कि पहले ताय के वश से चल निकाल फिर तार के वश से निकाला है तो { } इस के देने का कुछ आवश्यक नहीं । इसी प्रकार $\int\int$ फ(य,र)तारताय इस से यह समझो कि

पहले तार के वश से फिर ताय के वश से चल निकाला गया है। इसी तरह $\int\int\int$ फ(य, र, ल) तायतारताल इस से समझना चाहिये कि पहले ताय, तब तार, और फिर ताल के वश से चल का मान अपेक्षित है अर्थात् फल के पास जो ता रहे उस के वश से पहले फिर ज्यों ज्यों दूर में ता हैं क्रम से उन के वश से चल निकालना है।

मैंने लाघव के लिये वार वार अनेक कोष्ठ न लिखकर यह संकेत मान लिया है इस में कुछ विशेष नहीं चाहे उलटेही रीति से तुम उसी अर्थ को प्रकाश कर सकते हो अर्थात् जो ता सब से दूर हो उसी के वश से पहले फिर यथासन्नों के वश से।

जैसे यदि $\text{फ(य,र)} = \text{अय}^{२}\text{र} + \text{कर}^{२}\text{य}$ तो

$$\int\int \text{फ(य,र) ताय तार} = \int\int(\text{अय}^{२}\text{र} + \text{कर}^{२}\text{य})\text{तायतार}$$

$$= \int\left[\frac{\text{अय}^{३}\text{र}}{३} + \frac{\text{कर}^{२}\text{य}^{२}}{२}\right]\text{तार}$$

$$= \frac{\text{अय}^{३}\text{र}^{२}}{६} + \frac{\text{कर}^{३}\text{य}^{२}}{६} = \frac{\text{य}^{२}\text{र}^{२}}{६}(\text{अय} + \text{कर})$$ यह पहला स का मान हुआ।

और $\int\int$फ(य,र) तार ताय $= \int\int(\text{अय}^{२}\text{र} + \text{कर}^{२}\text{य})$ तारताय

$$= \int\left[\frac{\text{अय}^{२}\text{र}^{२}}{२} + \frac{\text{कर}^{३}\text{य}}{३}\right]\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{अय}^{३}\text{र}^{२}}{६} + \frac{\text{कर}^{३}\text{य}^{२}}{६} = \frac{\text{य}^{२}\text{र}^{२}}{६}(\text{अय} + \text{कर})$$ यह दूसरा स हुआ।

यहाँ पर स्थिराङ्कों को छोड़ दिया है।

६२। जब साठवें प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\int\int\text{फ(य,र)तारताय} - \int\int\text{फ(य,र)तायतार} = \text{फि(य)} + \text{फी(र)}$$

इस लिये $\int\int\text{फ(य,र)तारताय} = \int\int\text{फ(य,र)तायतार} + \text{फि(य)} + \text{फी(र)}$ (१)

यहाँ यदि $\int\text{फ(य,र) ताय} = \text{फा(य,र)}$ और $\int\text{फ(य,र)तार} = \text{फा}_{१}\text{(य,र)}$

तो $\int\int\text{फ(य,र) ताय तार} = \int\text{फा(य,र) तार} = \text{फा}_{२}\text{(य,र)}$

और $\int\int\text{फ(य,र) तारताय} = \int\text{फा}_{१}\text{(य,र)ताय} = \text{फा}_{३}\text{(य,र)}$

इस लिये $\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ(य,र)तारताय} = \int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\{\text{फा}_{१}\text{(य,क)} - \text{फा}_{१}\text{(य,अ)}\}\text{ताय}$

वा $\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ(य,र)तारताय} = \int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\text{फा}_{१}\text{(य,क)ताय} - \int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\text{फा}_{१}\text{(य,अ)ताय}$

$= \text{फा}_{३}\text{(घ,क)} - \text{फा}_{३}\text{(ग,क)} - \text{फा}_{३}\text{(घ,अ)} + \text{फा}_{३}\text{(ग,अ)}$, ...(२)

इसी तरह $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य,र)तायतार $= \int_{अ}^{क}$ { फा(घ,र)—फा(ग,र) } तार

$= \int_{अ}^{क}$ फा(घ,र) तार—$\int_{अ}^{क}$ फा(ग,र) तार

= $फा_२$(घ,क)—$फा_२$(घ,अ)—$फा_२$(ग,क) + $फा_२$(ग,अ)..............(३)

परंतु (१) से

$फा_३$(य,र) = $फा_२$(य,र) + फि(य) + फी(र)

इस लिये, $फा_३$(घ,क) = $फा_२$(घ,क) + फि(घ) + फी(क)

$फा_३$(ग,क) = $फा_२$(ग,क) + फि(ग) + फी(क)

$फा_३$(घ,अ) = $फा_२$(घ,अ) + फि(घ) + फी(अ)

$फी_३$(ग,अ) = $फा_२$(ग,अ) + फि(ग) + फी(अ)

इन का उत्थापन (२) में देने से

{ $फा_३$ (घ,क) + $फा_३$ (ग,अ) } — { $फा_३$ (ग,क) + $फा_३$(घ,अ) }

= { $फा_२$ (घ,क) + $फा_२$ (ग,अ) } — { $फा_२$ (घ,अ) + $फा_२$(ग,क }

अर्थात् (२) और (३) तुल्य हुए। इस लिये इस पर से

$\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क}$ फ(य,र) तार ताय $= \int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य,र) तायतार

यह सिद्ध हुआ।

६३। ऊपर के प्रक्रम से जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ उसे (२) प्रक्रम के ऐसा श्रेढ़ी द्वारा भी प्रकाश कर सकते हैं।

मानो फ(य,र) में य के मान, अ से लेकर क तक बीच में

अ, $य_१$, $य_२$, ······ $य_{न-१}$, क हैं।

जहाँ $य_१$—अ = $च_१$, $य_२$—$य_१$ = $च_२$ ········ क—$य_{न-१}$ = $च_न$ ।

और र के मान ग से लेकर घ तक बीच में

ग, $र_१$, $र_२$, ········ $र_{म-१}$, घ हैं

जहाँ $र_१$—ग = $ज_१$, $र_२$—$र_१$ = $ज_२$ ········ घ—$र_{-१}$ = $ज_म$ ।

अब यहाँ यह इच्छा है कि $च_त ज_द$ फ($य_{त-१}$, $र_{द-१}$) इस में द के स्थान में १, २, ३ ··· म का और त के स्थान में १, २, ३, ··· न का उत्थापन देने से जो श्रेढ़ियाँ उत्पन्न होंगीं उन का योग जानें। यहाँ न और म का मान अनन्त है।

लाघव के लिये कल्पना करो कि श्रेढ़ियों का कोई पद बनाने के लिये च ज फ(य,र) यह एक मुद्रा अर्थात् साँचा है जहाँ च, ज, और य, र के

स्थान में जिस पद का मान जानना होगा उस की संख्या रख देना होगा और $य_० = अ$, $र_० = ग$ ऐसा समझना। इस साँचे में च के स्थान में $\triangle य$ और ज के स्थान में $\triangle र$ को रख दें जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है तो साँचे का रूप $\triangle य \triangle र$ फ(य,र) ऐसा होगा।

जैसे किसी खेलौने के साँचे में मिट्टी, लोहा चाँदी, सोना इत्यादि के रखने से जितनी मूर्त्तियाँ बनेंगी सब के मोल और रंग में तो फ़र्क़ परन्तु रूप एकसा होगा इसी तरह इस साँचे से जितने पद बनेंगे सब के रंग और मोल अर्थात् मान तो भिन्न भिन्न परन्तु रूप एकसा होगा।

साँचे में त के स्थान में १, द के स्थान में १, २, ३ ···· म का उत्थापन देने से

$$च_१ \{ ज_१फ(अ,ग) + ज_२फ(अ,र_१) + ज_३फ(अ,र_२) + \cdots\cdot ज_मफ(अ,र_{म-१}) \} \cdots\cdot (१) \text{ श्रेढ़ी}$$

त के स्थान में २ का और द के स्थान में १, २, ··· म का उत्थापन देने से

$$च_२ \{ ज_१फ(य_१,ग) + ज_२फ(य_१,र_१) + ज_३फ(य_१,र_२) + \cdots + ज_मफ(य_१,र_{म-१}) \cdots (२) \text{ श्रेढ़ी}$$

इसी तरह

$$च_३ \{ ज_१फ(य_२,ग) + ज_२फ(य_२,र_१) + ज_३फ(य_२,र_२) + \cdots + ज_मफ(य_२,र_{म-१}) \cdots (३) \text{ श्रेढ़ी}$$

$$\vdots$$

$$च_{त+१} \{ ज_१फ(य_त,ग) + ज_२फ(य_त,र_१) + ज_३फ(य_त,र_२) + \cdots ज_मफ(य_त,र_{म-१}) \} \cdots (त+१) \text{ श्रेढ़ी}$$

$$\vdots$$

$$च_न \{ ज_१फ(य_{न-१},ग) + ज_२फ(य_{न-१},र_१) + ज_३फ(य_{न-१}) + \cdots\cdot + ज_मफ(य_{न-१},र_{म-१}) \} \cdots (न) \text{ श्रेढ़ी}$$

इन में यदि म = ∞ तो { } कोष्ठकान्तर्गत (त + १) श्रेढ़ी का योग (२) प्रक्रम से $\int_ग^घ फ(य_त,र)$ तार यह होगा। कल्पना करो कि यह फा $(य_त)$ के समान है तो त के स्थान में ०, १, २, ···· न—१ का उत्थापन देने से क्रम से ऊपर के श्रेढ़ियों का मान।

$$\left.\begin{array}{l} च_१फा(अ) \\ च_२फा(य_१) \\ च_३फा(य_२) \\ \vdots \\ च_नफा(य_{न-१}) \end{array}\right\}$$

इन का योग अब (२) ही प्रक्रम से सिद्ध है कि यदि न = ∞ तो $\int_अ^क फा(य)ताय$ यह अर्थात् $\int_अ^क \int_ग^घ फ(य,र)$ तारताय यह होगा।

इसी तरह यदि हर एक श्रेढ़ियों का { } कोष्ठकान्तर्गत ऊर्ध्वाधर एक एक पदों का पहले योग करो तो

$\int_{अ}^{क}$ फ(य,ग) ताय = फा$_{१}$(ग),फा$_{१}$(र$_{१}$) इत्यादि होगा फिर सब पदों का योग अर्थात् श्रेढ़ियों का योग = ज$_{१}$फा$_{१}$(र) + ज$_{२}$फा$_{१}$(र$_{१}$) + ज$_{३}$फा$_{१}$(र$_{२}$) + · · ·

$$+ \int ज_{म}फा_{१}(र_{म-१}) = \int_{ग}^{घ} फा_{१}(र)\ तार = \int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क} फ(य,र) तायतार$$

परन्तु श्रेढ़ियों के तिर्यक् पदों का योग कर वा ऊर्ध्वाधर पदों का योग कर फिर उन को जोड़ने से श्रेढ़ियों का योग तो एक ही होगा इस लिये $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य,र)तारताय = $\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क}$ फ(य,र) तायतार यह सिद्ध हुआ।

६४। जब निश्चय है कि $\int$ फ(य,र)तार इस में य स्थिर मान है तो $\int_{फ_{१}(य)}^{फ_{२}(य)}$ फ(य,र) तार इस का भी मान जान सकते हैं फिर इस पर से

$$\int_{अ}^{क}\int_{फ_{१}(य)}^{फ_{२}(य)} फ(य,र) तायतार$$ इस का मान आजायगा।

यहाँ भी यदि (६३)वें प्रक्रम से श्रेढ़ियों की परम्परा बनावोगे तो विशेष इतना ही होगा कि ग, र$_{१}$, र$_{२}$ इत्यादि प्रत्येक श्रेढ़ियों में य के वश से भिन्न भिन्न होंगे जैसे (त + १) श्रेढ़ी के { } अन्तर्गत

$$ज_{१}फ(य_{त},ग) + ज_{२}फ(य_{त},र_{१} + ज_{३}फ(य_{त},र_{२}) + \cdots ज_{म}फ(य_{त},र_{म-१})$$

इन पदों में

$$ग = फ_{१}(य_{त}), ज_{१} = र_{१} — फ_{१}(य_{त}), ज_{२} = र_{२} — र_{१}, \cdots ज_{म} = फ_{२}(य_{त}) — र_{म-१}$$

ऐसा मानना पड़ेगा फिर पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि इन पदों का योग

$$\int_{फ_{१}(य_{त})}^{फ_{२}(य_{त})} फ(य_{त},र)\ तार$$ यही होगा।

कल्पना करो कि $\int_{फ_{२}(य_{त})}^{फ_{२}(य_{त})}$ फ(य$_{त}$,र)तार

यह फा(य$_{त}$)के समान है तो, त के स्थान में$_{०,१,२,}$ · · · · न-१का उत्थापन देने से

$$\int_{अ}^{क}\int_{फ_{१}(य)}^{फ_{२}(य)} फ(य,र)\ तारताय$$ का भी मान जान जाओगे।

६५। यदि फ(य,र) = फा(य) × फि(र) तो तार के वश चलानयन से

$\int$ फा(य) × फि(र)तार = फा(य) $\int$ फि(र)तार = फा(य)फि$_{१}$(र) + फा(य)स्थि जहाँ

$\int$ फि(र)तार = फि$_1$(र) + स्थि   इस लिये

$\int_{ग}^{घ}$ फा(य) फि(र)तार = फा(य) { फि$_1$(घ)—फि$_1$(ग) }

और $\int$ फा(य) { फि$_1$(घ)–फि$_1$(ग) } ताय = { फि$_1$(घ)–फि$_1$(ग) } $\int$ फा(य)ताय

= { फि$_1$(घ)—फि$_1$(ग) } { फा$_1$(य) + स्थि$_1$ }

यदि $\int$ फा(य)ताय = फा$_1$(य) + स्थि$_1$

इस लिये

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य) × फि(र)तारताय = { फि$_1$(घ)–फि$_1$(ग) } { फा$_1$(क)–फा$_1$(अ) }

= $\int_{ग}^{घ}$ फि(र)तार × $\int_{अ}^{क}$ फा(य)ताय

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि अ, क, ग, घ स्थिराङ्क हों अर्थात् य, वा र का कोई फल न हों तो

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फा(य) × फि(र)तारताय = $\int_{अ}^{क}$ फा(य)ताय × $\int_{ग}^{घ}$ फि(र)तार ऐसा होगा।

६६। इसी तरह जहाँ तीन चलराशि के वश से

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}\int_{त}^{थ}$ फ(य,र,ल)तालतारताय ऐसा स्वरूप हो वहाँ यह समझना चाहिये

कि पहले र,य को स्थिर मान ताल के वश से त,थ के भीतर सान्तचल निकाला गया फिर इस में य,ल को स्थिर मान, तार के वश से ग,घ के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया फिर इस का ताय के वश से अ,क के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया है। इसे त्रिगुणचल कहते हैं।

६३प्रक्रम से फ(य,र,ल)△ल△र△य△इस साँचे से जो श्रेढ़ियाँ बनेंगी उन का (२)प्रक्रम से यदि योग करो तो वह

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}\int_{त}^{थ}$ फ(य,र,ल)तालतारताय इसी के समान होगा।

विद्यार्थियों को चाहिये कि श्रेढ़ियों का रूप फैला कर उनके योग पर से परस्पर सब की तुलना कर अपना मन भरलें।

यहाँ पूर्व युक्ति से प्रसिद्ध है कि थ, और त य,र के फल, घ और ग केवल य के फल हो सकते हैं परन्तु क और अ सर्वदा स्थिराङ्क ही रहेंगे।

६७। इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\int\int$ (य^2 + र + र^2)तायतार इसका क्या मान होगा।

यहाँ $फ(य,र) = य^2 + र + र^2$

इस लिये $\int फ(य,र)\ ताय = य\left(\frac{य^2}{३} + र + र^2\right)$ र को स्थिर मानने से

फिर $\int\int फ(य,र) तायतार = \int य\left(\frac{य^2}{३} + र + र^2\right) तार = य\left[\frac{य^2 र}{३} + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}\right]$

यको स्थिर मानने से ·

इस लिये $स = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३}$

यहाँ यदि $\int\int फ(य,र) तारताय$ इसका मान जानना हो तो पहले

$\int फ(य,र) तार = \int (य^2 + र + र^2) तार = य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}$, य को स्थिर मानने से फिर

$\int\int फ(य,र) तारताय$

$= \int\left[\left(य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}\right]\right. ताय = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३}$ यह दूसरा स हुआ। दोनों स्थानों में स्थिराङ्क छोड़ दिया है। स्थिराङ्क लेने से पहले

$\int फ(य,र)\ ताय = \int (य^2 + र + र^2) ताय = \frac{य^3}{३} + र\ य + र^2\ य + स्थि$

फिर $\int\int फ(य,र) तायतार = \int\left(\frac{य^3}{३} + र\ य + र^2 य + स्थि\right) तार$

$= \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} + स्थि\ र + स्थि_1 = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} + फी(र)$

यह स का मान हुआ।

फिर $\int फ(य,र)\ तार = \int (य^2 + र + र^2) तार = य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} - स्थि_2$

और $\int\int फ(य,र) तारताय = \int\left(य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} - स्थि_2\right) ताय$

$= \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} - स्थि_2 य - स्थि_3 = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} - फा(य)$

इस लिये दोनों स का अन्तर फी (र) + फा(य) यह हुआ।

(२) $\int\int फ(य,र) तारताय$ इस का क्या मान होगा।

यदि $फ(य,र) = ज्यायर$

यहाँ $\int फ(य,र)\ तार = \int ज्यायर\ तार = -\frac{कोज्यायर}{य}$ ।

और $\int\int फ(य,र)\ तार\ ताय = -\int \frac{कोज्या(यर)ताय}{य}$

$= -\int\frac{कोज्यायर\ तायर}{यर} = -\int\frac{कोज्यालताल}{ल}$, यदि ल = यर,

परन्तु

$$\frac{कोज्याल}{ल} = \frac{१-\frac{ल^२}{|\underline{२}}+\frac{ल^४}{|\underline{४}}-\frac{ल^६}{|\underline{६}}+\cdots}{ल} = \frac{१}{ल}-\frac{ल}{|\underline{२}}+\frac{ल^३}{|\underline{४}}-\frac{ल^५}{|\underline{६}}+\cdots$$

इस लिये

$$-\int\frac{कोज्यालताल}{ल} = -\int\frac{कोज्यायरतायर}{यर} = लाल + \frac{ल^२}{२|\underline{२}} - \frac{ल^४}{४|\underline{४}}+\frac{ल^६}{६|\underline{६}}-\cdots$$

$= -लायर + \frac{य^२र^२}{२|\underline{२}} - \frac{य^४र^४}{४|\underline{४}}+\frac{य^६र^६}{६|\underline{६}}-\cdots\cdots$, यही उत्तर हुआ।

(३) (२)उदाहरण में $\int_अ^क\int_0^१ फ(य,र)तारताय$ का क्या मान होगा।

(२) उदाहरण से $\int फ(य,र)तार = -\frac{कोज्यायर}{य}$

इस लिये $\int_0^१ फ(य,र)तार = -\frac{कोज्याय}{य}+\frac{१}{य}$

और $\frac{१}{य}-\frac{कोज्याय}{य} = -\frac{१}{य}+\frac{य}{|\underline{२}}-\frac{य^३}{|\underline{४}}+\cdots+\frac{१}{य}$

$= \frac{य}{|\underline{२}}-\frac{य^३}{|\underline{४}}+\frac{य^५}{|\underline{६}}-\frac{य^७}{|\underline{८}}+\cdots$

इस लिये $\int\int_0^१ फ(य,र)तारताय = \frac{य^२}{२|\underline{२}}-\frac{य^४}{४|\underline{४}}+\frac{य^६}{६|\underline{६}}-\frac{य^८}{८|\underline{८}}+\cdots$

और $\int_अ^क\int_0^१ फ(य,र)तारताय = \frac{क^२-अ^२}{२|\underline{२}}-\frac{क^४-अ^४}{४|\underline{४}}+\frac{क^६-अ^६}{६|\underline{६}}-\frac{क^८-अ^८}{८|\underline{८}}+\cdots$

यही उत्तर हुआ।

(४) $\int_0^अ\int_0^य\int_0^{य+र} इ^{य+र+ल}तालतारताय$ इस का मान जानना चाहिये।

यहाँ $\int इ^{य+र+ल}ताल = इ^{य+र+ल}$, य, और र को स्थिर मानने से

इस लिये $\int_0^{य+र} इ^{य+र+ल}ताल = इ^{२य+२र} - इ^{य+र}$।

$\int\int_0^{य+र} इ^{य+र+ल}तालतार = \int इ^{२य+२र}तार - \int इ^{य+र}तार$

$$= \frac{\text{इ}^{\text{२य}+\text{२र}}}{\text{२}} - \text{इ}^{\text{य}+\text{र}}$$ इस लिये

$$\int_{\circ}^{\text{य}}\int_{\circ}^{\text{य}+\text{र}} \text{इ}^{\text{य}+\text{र}+\text{ल}}\text{तालतार} = \frac{\text{इ}^{\text{४य}}}{\text{२}} - \frac{\text{इ}^{\text{२य}}}{\text{२}} - \text{इ}^{\text{२य}} + \text{इ}^{\text{य}} = \frac{\text{इ}^{\text{४य}}}{\text{२}} - \frac{\text{३}}{\text{२}}\text{इ}^{\text{२य}} + \text{इ}^{\text{य}}$$

और $$\int\int_{\circ}^{\text{य}}\int_{\circ}^{\text{य}+\text{र}} \text{इ}^{\text{य}+\text{र}+\text{ल}}\text{तालतारताय} = \frac{\text{इ}^{\text{४य}}}{\text{८}} - \frac{\text{३इ}^{\text{२य}}}{\text{४}} + \text{इ}^{\text{य}}$$

इस लिये

$$\int_{\circ}^{\text{अ}}\int_{\circ}^{\text{य}}\int_{\circ}^{\text{य}+\text{र}} \text{इ}^{\text{य}+\text{र}+\text{ल}}\text{तालतारताय} = \frac{\text{इ}^{\text{४अ}}}{\text{८}} - \frac{\text{१}}{\text{८}} - \frac{\text{३}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{२अ}} + \frac{\text{३}}{\text{४}} + \text{इ}^{\text{अ}} - \text{१}$$

$$= \frac{\text{इ}^{\text{४अ}}}{\text{८}} - \frac{\text{३}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{२अ}} + \text{इ}^{\text{अ}} - \frac{\text{३}}{\text{८}}$$ यही उत्तर हुआ ।

(५) यदि $\text{फ}(\text{य},\text{र}) = (\text{य}^{\text{२}} + \text{य})(\text{र}^{\text{३}} + \text{र})$

तो $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\text{तारताय}$ इस का क्या मान होगा ।

यहाँ $$\int \text{फ}(\text{य},\text{र})\text{तार} = (\text{य}^{\text{२}} + \text{य})\left[\frac{\text{र}^{\text{४}}}{\text{४}} + \frac{\text{र}^{\text{२}}}{\text{२}}\right]$$

$$\therefore \int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\text{तार} = (\text{य}^{\text{२}} + \text{य})\left[\frac{\text{घ}^{\text{४}} - \text{ग}^{\text{४}}}{\text{४}} + \frac{\text{घ}^{\text{२}} - \text{ग}^{\text{२}}}{\text{२}}\right]$$

फिर $$\int\int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\text{तारताय} = \left[\frac{\text{य}^{\text{३}}}{\text{३}} + \frac{\text{य}^{\text{२}}}{\text{२}}\right]\left[\frac{\text{घ}^{\text{४}} - \text{ग}^{\text{४}}}{\text{४}} + \frac{\text{घ}^{\text{२}} - \text{ग}^{\text{२}}}{\text{२}}\right]$$

इस लिये $$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\text{तारताय}$$

$$= \left[\frac{\text{क}^{\text{३}} - \text{अ}^{\text{३}}}{\text{३}} + \frac{\text{क}^{\text{२}} - \text{अ}^{\text{२}}}{\text{२}}\right]\left[\frac{\text{घ}^{\text{४}} - \text{ग}^{\text{४}}}{\text{४}} + \frac{\text{घ}^{\text{२}} \div \text{ग}^{\text{२}}}{\text{२}}\right]$$ यह

$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} (\text{य}^{\text{२}} + \text{य})\text{ताय} \times \int_{\text{ग}}^{\text{घ}} (\text{र}^{\text{३}} + \text{र})\text{तार}$ इस के तुल्य होता है ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। $$\frac{(\frac{\text{अ}}{\text{य}} - \text{कय})\text{ताय}}{\sqrt{(\text{अ} + \text{य}\sqrt{\text{ग}} - \text{कय}^{\text{२}})(\text{कय}^{\text{२}} + \text{य}\sqrt{\text{ग}} - \text{अ})}}$$ इस का मान क्या होगा ।

यहाँ $र = \frac{अ}{य} + कय$ कल्पना करो तो चल का मान $कोज्या^{-१} \frac{र}{\sqrt{(ग+४अक)}}$

२। $\int \frac{२(म^{२}—१) \ स्पयताय}{१+म^{२}स्प^{२}य}$ इस का क्या मान होगा।

उ० $ला \ (कोज्या^{२}य + म^{२}ज्या^{२}य)$

३। सिद्ध करो कि $\int \frac{ताय}{य^{न+१}\sqrt{१+(\frac{अ}{य})^{२न}}} = \frac{१}{नअ^{न}} ला \frac{य^{न}}{अ^{न}+\sqrt{अ^{२न}+य^{२न}}}$

४। सिद्ध करो कि $\int \frac{१-स्पय}{१+स्पय} ताय = ला \ ज्या \ (\frac{\pi}{४}+य)—य$

५। सिद्ध करो कि $\frac{३}{२} \frac{य^{\frac{१}{२}}}{\sqrt{(अ^{३}-य^{३})}} = ज्या^{-१}\frac{य^{\frac{३}{२}}}{अ^{\frac{३}{२}}}$ (मानो कि $र = य^{\frac{३}{२}}$)

६। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{४अ^{३}ताय}{य^{४}+अ^{२}य^{२}+अ^{४}} = ला \frac{य^{२}+अय+अ^{२}}{य^{२}—अय+अ^{२}} + \frac{२}{\sqrt{३}} स्प^{-१} \frac{यअ\sqrt{३}}{अ^{२}—य^{२}}$$

७। सिद्ध करो कि यदि $ष = \frac{\pi}{न}$ और $न = \infty$ तो

$\{ ज्याषज्या२षज्या३ष \cdots ज्याष \ (न-१) \}^{\frac{१}{न}} = \frac{१}{२}$

८। सिद्ध करो कि यदि $ष = \frac{\pi}{न}$ और न = अनन्त तो

$\{ स्पषस्प२षस्प३ष \cdots स्पष \ (न—१) \}^{\frac{१}{न}} = १$

९। सिद्ध करो कि यदि $ष = \frac{\pi}{न}$ और $न = \infty$ तो

कोज्याषकोज्या२षकोज्या३ष $\cdots$ कोज्याष (न—१)

= ज्याषज्या२षज्या३ष $\cdots$ ज्याष (न—१)

१०। सिद्ध करो कि यदि फ(य,र) = यरकोज्यायर तो यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें तो फ(य,र) $—\int\int$ फ(य,र)तारताय = कोज्यायर (यर + १)

११। सिद्ध करो कि यदि $\int_{क}^{अ}$ फ(य)ताय = १ और फ(य) सर्वदा धन हो तो

$\{ \int_{क}^{अ} फ(य)कोज्यागयताय \}^{२} + \{ \int_{क}^{अ} फ(य)ज्यागयताय \}^{२} \angle १$

यहाँ (२)प्रक्रम और (४०)वें प्रक्रम से पहले सिद्ध करो कि

$\int_{क}^{अ} फ(य)ताय = (अ—क) \ फ \{ क + प \ (अ—क) \} = १$

इस लिये $\int_{क}^{अ} \{ फ(य) \}^{२} ताय = \int_{क}^{अ} फ(य) \ फ(य)ताय =$

$= फ\{क+प(अ-क)\}\int_{क}^{अ}फ(य)ताय = फ\{क+प(अ-क)\}$

और $\int_{क}^{अ}$ कोज्या²गयताय $= \frac{1}{ग}\int_{कग}^{अग}$ कोज्या²गयतायग

$$= \frac{1}{ग}\left\{\frac{गअ-गक}{2} + \frac{ज्या2अग-ज्या2गक}{4}\right\}$$

(क्योंकि $\int$ कोज्या²गयतायग $= \frac{यग}{2} + \frac{ज्या2गय}{4}$) इस लिये

$\int_{क}^{अ}\{फ(य)\}^2$ ताय × $\int_{क}^{अ}$ कोज्या²गयताय

$$= फ\{क+प(अ-क)\}^2\left\{\frac{अ-क}{2} + \frac{ज्या2अग-ज्या2गक}{4ग}\right\}$$

यह $\left\{\int_{क}^{अ}फ(य)\right.$ कोज्यागयताय$\left.\right\}^2$ इस से बड़ा होगा (४अध्याय के १९वें प्रश्न से)

इसी तरह $\int$ ज्या²गय ताय $= \frac{1}{ग}\int$ ज्या²गय तायग $= \frac{यग}{2} - \frac{ज्या2गय}{4}$

इस लिये $\int_{क}^{अ}$ज्या²गय ताय $= \frac{1}{ग}\left\{\frac{अग-कग}{2} - \frac{ज्या2अग-ज्या2कग}{4}\right\}$

इस लिये $\int_{क}^{अ}\{फ(य)\}^2$ ताय × $\int_{क}^{अ}$ ज्या²गय ताय

$$= फ\{क+प(अ-क)\}^2\left\{\frac{अ-क}{2} - \frac{ज्या2अग-ज्या2कग}{4ग}\right\}$$

यह बड़ा होगा $\left\{\int_{क}^{अ}फ(य)\right.$ज्या गय ताय$\left.\right\}^2$ इस से।

और तब दोनों का योग $= फ\{क+प(अ-क)\}^2\{अ-क\} = 1$ यह बड़ा होगा $\left\{\int_{क}^{अ}फ(य)\right.$ कोज्यागयताय$\left.\right\}^2 + \left\{\int_{क}^{अ}फ(य)\right.$ज्यागयताय$\left.\right\}^2$ इस से।

१२। सिद्ध करो कि यदि $\int_{क}^{अ}फ(य)ताय = 1$ और फ(य) सर्वदा धन हो तो

$$\int_{क}^{अ}य^2फ(य)\,ताय > \left\{\int_{क}^{अ}यफ(य)\,ताय\right\}^2$$

६८। चलराशिकलन अब समाप्त हो गया। पिछले अध्यायों में जो अनेक सिद्धान्त और उदाहरण दिखला आये हैं उन्हीं का प्रपञ्च सब अगले अध्यायों में हैं।

जैसे व्यक्तगणित में परिकर्माष्टक और बीजगणित में वर्गप्रकृति पर्यन्त गणित मुख्य है आगे सब दोनों गणितों में इन्हीं का सर्वत्र प्रपञ्च है इसी तरह यहाँ भी आगे सर्वत्र पिछले सिद्धान्तों का ही प्रपञ्च है इस लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि इन पाँचों अध्यायों में जो कुछ लिखा गया है उन का अच्छी तरह से ध्यान देकर अभ्यास करें बिना उन के जाने अगले अध्यायों का ज्ञान होना अत्यन्त दुर्घट है।

इति पञ्चमाध्याय।

षष्ठाध्याय

वक्रक्षेत्रों का चापानयन।

६९। चलनकलन के १६वें अध्याय से सिद्ध है कि यदि किसी वक्र का $र = फ(य)$ ऐसा समीकरण हो तो $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$ ऐसा होगा

इस लिये $ताचा = \sqrt{ताय^2 + तार^2}$। यहाँ पर वक्र के समीकरण पर से ताचा का मान फा(य) ताय ऐसा होगा फिर पिछले अध्यायों के बल से $\int ताचा = चा + स्थि = \int ताय \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}} = \int \sqrt{ताय^2 + तार^2} = \int तायफा(य)$ यह सिद्ध हो जायगा।

$चा + स्थि = \int ताय \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$ इस लिये कल्पना करो कि

जब $य = य_१$ तब $चा = चा_१$ और जब $य = य_२$ तब $चा = चा_२$

इस लिये $चा_२ - चा_१ = \int_{य_१}^{य_२} ताय \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$

इस लिये दो कोटियों के बीच में वक्र का जो चाप है उसके जानने के लिये स्थिराङ्क का कुछ भी प्रयोजन नहीं केवल $य_१$ और $य_२$ जो उन दो कोटियों के भुज हों उन के बीच $\int ताय \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$ इस का मान ले आना चाहिये।

७०। जिस परवलय (Parabola) का $र^2 = ४ अय$ यह समीकरण है उसके चाप का प्रमाण जानना है।

यहाँ $र^2 = ४ अय$ $\therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र}$ और $१ + \frac{तार^2}{ताय^2} = \frac{र^2 + ४अ^2}{र^2} = \frac{४अय + ४अ^2}{४ अय}$

$= \frac{य + अ}{य}$। इस लिये $\int \left[\frac{य + अ}{य}\right]^{\frac{१}{२}} ताय = \int \frac{य + अ}{\sqrt{य^2 + अय}} ताय$

$$= \int \frac{य + \frac{अ}{२}}{\sqrt{य^2 + अय}} ताय + \int \frac{\frac{अ}{२} ताय}{\sqrt{य^2 + अय}} = \sqrt{य^2 + यअ} + \frac{अ}{२} ला(य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^2 + अय})$$

(९)वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से।

इस लिये $चा + स्थि = \sqrt{य^2 + यअ} + \frac{अ}{२} ला(य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^2 + अय})$ ······ (१)

इस में यदि $य = ०$ तो क्षेत्र लक्षण से $चा = ०$

इस लिये स्थि = $\frac{अ}{२}$ ला ($\frac{अ}{२}$)

इस का उत्थापन (१) में देने से

परवलय का चाप = $\sqrt{य^{२} + यअ} + \frac{अ}{२}$ ला $(य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^{२} + अय}) - \frac{अ}{२}$ला $\frac{अ}{२}$

$= \sqrt{य^{२} + यअ} + \frac{अ}{२}$ला $\left[\frac{२य + अ + २\sqrt{य^{२} + अय}}{अ}\right]$

इस में यदि य = अ तो नाभी से जो लम्ब य अक्ष पर होगा वह एक भाग में जहाँ परवलय को काटेगा वहाँ से शिरः स्थान तक का चाप मान $अ\sqrt{२} + \frac{अ}{२}$ला $\left[\frac{३अ + २\sqrt{२अ^{२}}}{अ}\right] = अ\sqrt{२} + \frac{अ}{२}$ला $(३ + २\sqrt{२})$ यह हुआ

७१। चक्रालद का चापानयन (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का ११वाँ वक्र देखो)

इस में $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\frac{२क}{य}}$ (चलनकलन का ३८८ पृष्ठ देखो)

इस लिये $\int ताचा = चा = (२क)^{\frac{1}{2}} य^{-\frac{1}{2}}$ ताय $= २\,(२क)^{\frac{1}{2}}\ (य)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{८कय}$

यहाँ क्षेत्रलक्षण से जब य = ०तब चा = ०इस लिये स्थिराङ्क का मान शून्य होगा।

७२। जिस वक्र का र = अ य $^{\frac{म'}{न'}}$ यह समीकरण है उसके चाप का आनयन।

$र = अय^{\frac{म'}{न'}} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{म'}{न'}\, अय^{\frac{म'}{न'} - १}$

और $\sqrt{\frac{तार^{२}}{ताय^{२}} + १} = \sqrt{१ + \frac{म'^{२}अ^{२}}{न'^{२}}\, य^{\frac{२म' - २न'}{न'}}}$

अब $\int ताय \sqrt{१ + \frac{म'^{२}अ^{२}}{न'^{२}}\, य^{\frac{२म' - २न'}{न'}}}$ इस का मान १२वें प्रक्रम के (४)

उदाहरण में यदि $\frac{प}{ब} = \frac{१}{२}$ । म = १, न = $\frac{२म' - २न'}{न'}$ मानो तो

$\frac{म}{न} = \frac{न'}{२(म' - न')}$ यह यदि अभिन्न और धन हो तो विदित हो जायगा।

अथवा $\frac{न'}{२(म' - न')} + \frac{१}{२}$ यह अभिन्न और ऋण हो तो भी उसी उदाहरण से

चल का मान विदित हो जायगा । यदि पहला ऋण अभिन्न दूसरा धन अभिन्न हो तो भी द्वितीयाध्याय से चल का मान विदित हो जायगा ।

जैसे यदि $\frac{म'}{न'} = \frac{३}{२}$ तो $\frac{म'-न'}{न'} = \frac{१}{२} \therefore \frac{न'}{२(म'-न')} = १$ अभिन्न

इस लिये $\sqrt{१+\frac{तार^{२}}{ताय^{२}}} = \sqrt{१+\frac{९अ^{२}}{४}य} = \frac{३अ}{२}\sqrt{\frac{४}{९अ^{२}}+य}$

इस लिये $\int ताचा = चा + स्थि = \frac{३अ}{२}\int\left[\frac{४}{९अ^{२}}+य\right]^{\frac{१}{२}}ताय = अ\left[\frac{४}{९अ^{२}}+य\right]^{\frac{३}{२}}$

इस में यदि य = ० तो क्षेत्रलक्षण से चा = ० इस लिये

$स्थि = अ \times \frac{८}{२७अ^{३}} = \frac{८}{२७अ^{२}}$ इस का उत्थापन देने से

$चा = \left\{\left[\frac{४}{९अ^{२}}+य\right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^{३}}\right\}$

७३। कातन्वली (Catenary) के चाप का आनयन ।

इस में $र = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$ इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

और $\sqrt{१+\frac{तार^{२}}{ताय^{२}}} = \sqrt{\frac{१}{४}\left(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{-\frac{२य}{ग}} + २\right)} = \frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

इसलिये $\int ताय \sqrt{१+\frac{तार^{२}}{ताय^{२}}} = चा + स्थि = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

यदि मूल विन्दु से कणना करें जहाँ य = ० तो यहाँ स्थिराङ्क शून्य होगा ।

७४। जिस वक्र का $य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण है उस के चाप का आनयन ।

यहाँ $\frac{तार}{ताय} = -\frac{र^{\frac{१}{३}}}{य^{\frac{१}{३}}}$ इस लिये $\frac{ताचा}{ताय} = \left[\frac{य^{\frac{२}{३}}+र^{\frac{२}{३}}}{य^{\frac{२}{३}}}\right]^{\frac{१}{२}} = \frac{अ^{\frac{१}{३}}}{य^{\frac{१}{३}}}$

इस लिये $च = अ^{\frac{१}{३}}\int ताय\, य^{-\frac{१}{३}} = \frac{३}{२}अ^{\frac{१}{३}}य^{\frac{२}{३}} + स्थि$

यहाँ य = ० उस विन्दु से यदि गणना करें तो स्थिराङ्क शून्य होगा ।

चलितवृत्त का व्यासार्द्ध यदि स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध का चतुर्थांश हो तो इस वक्र को एक प्रकार का अतिचक्रालद कहते हैं । (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो) ।

७५। ६९ वें प्रक्रम से यह भी कह सकते हो कि यदि र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध का ज्ञान करें तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{१ + \frac{\text{ताय}^{२}}{\text{तार}^{२}}}$ ऐसा होगा । इसलिये

$$\text{चा} = \int \text{तार}\sqrt{१ + \frac{\text{ताय}^{२}}{\text{तार}^{२}}} + \text{स्थि} \text{ ।} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

इसी तरह यदि य और र तीसरे चलराशि का फल हों तो चलनकलन के १५३ वें प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$\int \text{ताचा} = \text{चा} = \int \sqrt{\left[\frac{\text{ताय}^{२}}{\text{ताका}^{२}} + \frac{\text{तार}^{२}}{\text{ताका}^{२}}\right]}\, \text{ताका} + \text{स्थि} \cdots\cdots (२)$$

ऐसे ही चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से यदि अक्षीय भुज युग्म हों तो

$$\text{चा} = \int \left[\text{श्रु}^{२} + \frac{\text{ताश्रु}^{२}}{\text{ताष}^{२}}\right]^{\frac{१}{२}} \text{ताष} + \text{स्थि} \cdots\cdots\cdots (३)$$

$$\text{वा चा} = \int \left[१ + \text{श्रु}^{२}\frac{\text{ताष}^{२}}{\text{ताश्र}^{२}}\right]^{\frac{१}{२}} \text{ताश्र} + \text{स्थि} \cdots\cdots\cdots (४)$$

अथवा यदि स्प भ = $\text{श्रु}\frac{\text{ताष}}{\text{ताश्रु}}$ जहाँ भ, श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है तो

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}} \text{ इस लिये } \text{चा} = \int \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}}\, \text{ताष} + \text{स्थि} \\ &\text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} = \frac{१}{\text{कोज्याभ}} \text{, इसलिये } \text{चा} = \int \frac{\text{ताश्रु}}{\text{कोज्याभ}} + \text{स्थि} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (५)$$

चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से ज्याभ = $\frac{\text{ल}}{\text{श्र}}$, और कोज्याभ = $\frac{\sqrt{\text{श्रु}^{२} - \text{ल}^{२}}}{\text{श्र}}$

इन का उत्थापन (५) वें में देने से

$$\text{चा} = \int \frac{\text{श्रु}^{२}\text{ताष}}{\text{ल}} + \text{स्थि}, \quad \text{और } \text{चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{\text{श्रु}^{२} - \text{ल}^{२}}} + \text{स्थि} \cdots\cdots (६)$$

यहाँ ध्रुवविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल है ।

(चलनकलन का १४ वाँ अध्याय देखो)

इन सब पर से जहाँ जिस प्रकार से चलानयन में लाघव देख पड़े वहाँ उस प्रकार से चाप का मान निकालो ।

जिन प्रकारों में मूल लेने से ताचा का मान आता है वहाँ बीजगणित से स्पष्ट है कि एक ताचा का मान धन और दूसरा ऋण होगा इस लिये बुद्धिमानों को

चाहिये कि प्रश्न के अनुसार जहाँ जिस का प्रयोजन हो उसको ग्रहण करें जैसे ७३ वें प्रक्रम में कातन्वली के चापानयन में जो $\frac{1}{4}\left(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{-\frac{२य}{ग}} + २\right)$ इस का मूल लिया है वह धन माना है इस पर से जो चाप का मान आता है वह भी धन आता है अर्थात् मूलविन्दु से य अक्ष में दहनी और यदि य का मान धन मानो तो र अक्ष से दहने भाग में जो वक्र का भाग है उस के चाप का मान वह है। और इसी में यदि मूल ऋण मानो तो चाप का मान पूर्व ही के तुल्य ऋण आवेगा ऐसी दशा में य, अक्ष में मूल विन्दु से वाम भाग में य और र अक्ष से वाम भाग में जो वक्र खण्ड है उसके चाप का मान समझना चाहिये। (चलकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो)।

७६। लाग्रुरिकथिक वक्र के चाप का आनयन।

यहाँ वक्र का समीकरण $र = अइ^{\frac{य}{क}}$ (चलनक०, २८६ प्र०, १ वक्र)

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{अ}{क} इ^{\frac{य}{क}} = \frac{र}{क} \therefore \frac{\sqrt{र^2+क^2}}{क} = \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$

और $चा = \frac{1}{क} \int \sqrt{(र^2+क^2)}\, ताय$ देखो यहाँ फल में र का मान है और चल ताय के वश से निकालना है इस लिये र के स्थान में जब तक कोई तत्तुल्य य के फल का उत्थापन न दोगे तब तक चलज्ञान कठिन है। इस लिये यहाँ ७५ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{ताय}{तार} = \frac{क}{र} \text{ और } \sqrt{१ + \frac{ताय^2}{तार^2}} = \frac{ताचा}{तार} = \frac{\sqrt{र^2+क^2}}{र}$$

$$\text{और } चा = \int \frac{\sqrt{(र^2+क^2)}\,तार}{र} = \int \frac{क^2 तार}{र\sqrt{(र^2+क^2)}} + \int \frac{र तार}{\sqrt{(र^2+क^2)}}$$

$$= क\cdot ला \frac{र}{क+\sqrt{(र^2+क^2)}} + \sqrt{र^2+क^2} + स्थि$$ (१२ वें प्रक्रम का २३ वाँ अभ्यास के लिये जो प्रश्न है उसे देखो)

अब यहाँ जो य = ० तो र = अ इस में मानो कि $चा = चा_1$ तो

$$\therefore चा_1 = क\cdot ला \frac{अ}{क+\sqrt{अ^2+क^2}} + \sqrt{अ^2+क^2} + स्थि$$

$$\text{इसलिये } चा - चा_1 = क\cdot ला \frac{र(क+\sqrt{अ^2+क^2})}{अ(क+\sqrt{र^2+क^2})} + \sqrt{र^2+क^2} - \sqrt{अ^2+क^2}।$$

७७। दीर्घवृत्त के चाप का आनयन।

दीर्घवृत्त का समीकरण, $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(अ^2 — य^2)$ $\therefore \frac{र^2}{क^2} + \frac{य^2}{अ^2} = १$

(चलनकलन का १०९वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि य = अज्याष और र = ककोज्याष मान लें तो

$\frac{ताय}{ताष}$ = अकोज्याष, $\frac{तार}{ताष}$ = — कज्याष। अब ७५वें प्रक्रम के (२) समीकरण

से $\frac{ताचा}{ताष} = \sqrt{(अ^2 कोज्या^2 ष + क^2 ज्या^2 ष)}$ इस लिये

$$चा = \int \sqrt{(अ^2 कोज्या^2 ष + क^2 ज्या^2 ष)} ताष = अ \int \sqrt{(कोज्या^2 ष + \frac{क^2}{अ^2} ज्या^2 ष)} ताष$$

$$= अ \int \sqrt{(१ — इ^2 ज्या^2 ष)} ताष$$ यहाँ $१ - इ^2 = \frac{क^2}{अ^2}$ और अ = वृहद्व्यासार्द्ध,

क = लघुव्यासार्द्ध, $स्पष = \frac{कय}{अर} = \frac{य}{\sqrt{अ^2 — य^2}}$।

यहाँ $\sqrt{(१ — इ^2 ज्या^2 ष)}$ इस का मान द्वियुक्पद सिद्धान्त से बिना फैलाये चल ज्ञान नहीं हो सकता इस लिये फैलाने से

$$चा = अ \int (१ — \frac{१}{२} इ^2 ज्या^2 ष — \frac{१.१}{२.४} इ^4 ज्या^4 ष — \frac{१.१.३}{२.४.६} इ^6 ज्या^6 ष — \cdots) ताष$$

यदि ० और अ के बीच य के मान में अथवा ० और $\frac{\pi}{२}$ के बीच ष के मान में यदि ऊपर के चल का ज्ञान ३५वें प्रक्रम के लघूकरण सिद्धान्त से वा १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से करो तो दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश

$$= अ \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{२}} ताष — \frac{१}{२} इ^2 \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^2 षताष — \frac{१.१}{२.४} इ^4 \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^4 षताष \right.$$

$$\left. — \frac{१.१.३}{२.४.६} इ^6 \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^6 ष \cdots\cdots \right\}$$

$$= \frac{\pi अ}{२} \left[१ - \frac{१}{२^2} इ^2 — \frac{१^2.३}{२^2.४^2} इ^4 — \frac{१^2.३^2.५}{२^2.४^2.६^2} इ^6 — \frac{१^2.३^2.५^2.७}{२^2.४^2.६^2.८^2} इ^8 — \cdots \right]$$

इस का चौगुना करने से यदि प = २πअ = वृहद्व्यास से उत्पन्न वृत्त की परिधि। तो दीर्घवृत्त की परिधि

$$= प \left(१ — \frac{१}{२^2} इ^2 - \frac{१^2.३}{२^2.४^2} इ^4 — \frac{१^2.३^2.५}{२^2.४^2.६^2} इ^6 — \cdots \right)$$

इस में यदि आदि के दो पदों को केवल ग्रहण करो और $\text{इ}^{४}$ का मान बहुत अल्प होने के कारण और पदों को छोड़ दो तो दीर्घवृत्त की परिधि $= \text{प}\left(१ - \frac{१}{२^{२}}\text{इ}^{२}\right)$

$$= \text{प}\left(\frac{४ - \text{इ}^{२}}{४}\right) = \text{प}\left(\frac{३ - \frac{\text{क}^{२}}{\text{अ}^{२}}}{४}\right) = \text{प}\left(\frac{३\text{अ}^{२} - \text{क}^{२}}{४\text{अ}^{२}}\right)$$

यों अनेक प्रकार बना सकते हो (दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

७८। अतिपरवलय के चाप का आनयन।

इस का समीकरण $\text{र}^{२} = \frac{\text{क}^{२}}{\text{अ}^{२}}(\text{य}^{२} - \text{अ}^{२})$ वा $\frac{\text{य}^{२}}{\text{अ}^{२}} - \frac{\text{र}^{२}}{\text{क}^{२}} = १$

(चलनकलन का १११ वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि $\text{य} = \text{अछेप}$ और $\text{र} = \text{कस्पप}$ ऐसा मानो तो

$\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = -\ \text{अस्पपछेप},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{कछे}^{२}\text{प}$

इसलिये ७५ वें प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{(\text{अ}^{२}\text{स्प}^{२}\text{पछे}^{२}\text{प} + \text{क}^{२}\text{छे}^{४}\text{प})}$$

$$= \sqrt{(\text{अ}^{२}\text{स्प}^{४}\text{प} + \text{अ}^{२}\text{स्प}^{२}\text{प} + \text{क}^{२}\text{स्प}^{४}\text{प} + २\text{क}^{२}\text{स्प}^{२}\text{प} + \text{क}^{२})}$$

$$= \sqrt{\{(\text{अ}^{२} + \text{क}^{२})\text{स्प}^{४}\text{प} + \text{स्प}^{२}\text{प}(\text{अ}^{२} + २\text{क}^{२}) + \text{क}^{२}\}}$$

$$= \text{क}\sqrt{\left\{\frac{\text{अ}^{२} + \text{क}^{२}}{\text{क}^{२}}\text{स्प}^{४}\text{प} + \frac{\text{अ}^{२} + २\text{क}^{२}}{\text{क}^{२}}\text{स्प}^{२}\text{प} + १\right\}}$$

इसको फैलाने से सर्वत्र स्पप का कोई घात रहेगा जिस के चल का ज्ञान ३७ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

अथवा $\text{र} = \frac{\text{क}}{}\sqrt{\text{य}^{२} - \text{अ}^{२}}$ इसी समीकरण से यहाँ

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}\frac{\text{य}}{\sqrt{(\text{य}^{२} - \text{अ}^{२})}} \therefore \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \left\{\frac{(\text{क}^{२} + \text{अ}^{२})\text{य}^{२} - \text{अ}^{४}}{\text{अ}^{२}(\text{य}^{२} - \text{अ}^{२})}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$= \left[\frac{\text{इ}^{२}\text{य}^{२} - \text{अ}^{२}}{\text{य}^{२} - \text{अ}^{२}}\right]^{\frac{१}{२}} \text{ यदि } \frac{\text{क}^{२} + \text{अ}^{२}}{\text{अ}^{२}} = \text{इ}^{२}$$

इस लिये

$$\text{चा} = \int\sqrt{\left[\frac{\text{इ}^{२}\text{य}^{२} - \text{अ}^{२}}{\text{य}^{२} - \text{अ}^{२}}\right]}\text{ताय} = \text{अ}\int\sqrt{\left[\frac{\text{इ}^{२}\text{ल}^{२} - १}{\text{ल}^{२} - १}\right]}\text{ताल}।\ \{\text{यदि य} = \text{अल}\}$$

$$= \text{अइ}\int \text{ल}\frac{\sqrt{(1-\frac{1}{\text{इ}^2\text{ल}^2}}}{\sqrt{\text{ल}^2-1}}\text{ताल}$$

$$=\text{अ}\left\{\int\frac{\text{इल}}{\sqrt{(\text{ल}^2-1)}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\text{इ}^2\text{ल}^2}-\frac{1.1}{2.4}\frac{1}{\text{इ}^4\text{ल}^4}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{1}{\text{इ}^6\text{ल}^6}-\cdots\right)\text{ताल}\right\}$$

$$=\text{अ}\left\{\int\frac{\text{इल}}{\sqrt{(\text{ल}^2-1)}}\text{ताल}-\frac{1}{2\text{इ}}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^2-1}}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1}{2.4\text{इ}^3}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^3\sqrt{\text{ल}^2-1}}-\frac{1.1.3}{2.4.6\text{इ}^5}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^5\sqrt{\text{ल}^2-1}}\cdots\cdots\right\}$$

यहाँ $\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{म}}\sqrt{\text{ल}^2-1}}=\frac{1}{\text{म}-1}\frac{\sqrt{\text{ल}^2-1}}{\text{ल}^{\text{म}-1}}+\frac{\text{म}-2}{\text{म}-1}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{म}-2}\sqrt{\text{ल}^2-1}}$ इस लघूकरण सिद्धान्त से आदि पद को छोड़ और सब पदों के चल का मान जान सकते हो।

और आदि पद $\frac{\text{इल}}{\sqrt{\text{ल}^2-1}}$ ताल इस का चल $\text{इ}\sqrt{\text{ल}^2-1}$ यह है।

यहाँ म का मान विषम है इस लिये सब खण्डों में अन्त में $\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^2-1}}$ $=\text{छे}^{-1}\text{ल}$ यह होगा

यदि ० और अनन्त के बीच ल के मान में चाप का मान अपेक्षित हो तो ऊपर के लघूकरण सिद्धान्त से

$$\text{अइल}-\text{चा}=\frac{\pi\text{अ}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\text{इ}}+\frac{1.1}{2^2.4}\cdot\frac{1}{\text{इ}^3}+\frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6}\frac{1}{\text{इ}^5}\right.$$

$$\left.+\frac{1.1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8}\cdot\frac{1}{\text{इ}^7}+\cdots\right)$$ यह सिद्ध होगा।

७९। आर्किमिडिज़ के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes) (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (४) वक्र देखो)

इस का समीकरण $\text{श्रु}=\text{अष}$ इस लिये $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}=\text{अ}$। ७५ प्रक्रम के (३) समीकरण से $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}}=\sqrt{\left[\text{श्रु}^2+\frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताष}^2}\right]}$

इस लिये $\text{चा}=\int\sqrt{\left[\text{श्रु}^2+\frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताष}^2}\right]}\text{ताष}=\int\sqrt{(\text{श्रु}^2+\text{अ}^2)}\,\text{ताष}$

$= \text{अ}\int \sqrt{(१+\text{प}^२)}\text{ताप} = \frac{\text{अप}}{२}\sqrt{१+\text{प}^२} + \frac{\text{अ}}{२}\text{ला}\{\text{प}+\sqrt{१+\text{प}^२}\} + \text{स्थि}$ ।

यदि प = ० तो चा = ० इस लिये स्थिराङ्क का मान्य शून्य होगा ।

८०। जिस वक्र का श्रु = अ (१ + कोज्याप) यह समीकरण है उस के चाप का मान जानना । (चलनकलन के २८९ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो) यहाँ $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} = -$ अज्याप इस लिये

$$\text{चा} = \int \sqrt{\{\text{अ}^२(१+\text{कोज्याप})^२ + \text{अ}^२\text{ज्या}^२\text{प}\}}\,\text{ताप}$$

$$= \text{अ}\int \sqrt{(२+२\text{कोज्याप})}\text{ताप} = २\text{अ}\int \text{कोज्या}\frac{\text{प}}{२}\,\text{ताप} = ४\,\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२} + \text{स्थि} ।$$

यदि चाप की गणना वहाँ से करें जहाँ प = ० तो स्थिराङ्क का मान शून्य होगा । मूल का मान ऋण लेने से दूसरी दिशा का चाप $= -४\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२}$ ऐसा होगा । यहाँ यदि प = π तो ऊपर के आधे का प्रमाण $= ४\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२} = ४\text{अ}$ और ऋण मान से नीचे के आधे का प्रमाण $= ४\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२} = ४\text{अ}$ ।

इस लिये समग्र चाप का प्रमाण = ८अ यह हुआ ।

इस वक्र को अङ्गरेजी में क्यारडियाइड (Cardioid.) कहते हैं ।

८१। लाघुरिक्थिक सर्पिल के चाप आनयन ।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो)

यहाँ $\text{श्रु} = \text{अ}\cdot\text{इ}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$, इस लिये $\text{प} = \text{क}\cdot\text{ला}\frac{\text{श्रु}}{\text{अ}}$ और $\frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = \frac{\text{क}}{\text{श्रु}}$

इस लिये ७५ प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left[\text{श्रु}^२\frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२} + १\right]}\,\text{ताश्रु} = \int \sqrt{(\text{क}^२+१)}\text{ताश्रु} = \text{श्रु}\sqrt{\text{क}^२+१}$$

श्रुति का प्रमाण $\text{श्रु}_१$, $\text{श्रु}_२$ मानो तो उन के बीच के चाप का प्रमाण $(\text{श्रु}_२ - \text{श्रु}_१)\sqrt{\text{क}^२+१}$ यह होगा । . . . . (१)

चलनकलन से सिद्ध है कि इस सर्पिल में श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा सर्वदा स्थिर क है इस लिये इस कोण को यदि भ कहो तो (१) को $(\text{श्रु}_२ - \text{श्रु}_१)$ छेभ ऐसे भी लिख सकते हो

८२। अपचक्राकलद (Epicycloid.) के चाप का आनयन ।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (१३) वक्र देखो)

इस में चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि मूल विन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान

$= ल = (अ + २क)ज्या\frac{अप}{२क}$ और $श्रु^2 = अ^2 + ४क (अ + क) ज्या^2\frac{अप}{२क}$

इस लिये $ल^2 = \frac{ग^2(श्रु^2 - अ^2)}{ग^2 - अ^2}$ जहाँ $ग = अ + २क$

अब ७५ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$चा = \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ}\int\frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}} = -\frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ}\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)} + स्थि$$

परमनीच और परमउच्च में जहाँ क्रम से अ, अ + २क = ग श्रुति है इन के वीच में

$$चाप का मान = \int_{अ}^{अ+२क}\frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}} = \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ}\sqrt{ग^2 - अ^2} = \frac{ग^2 - अ^2}{अ}$$

$$= \frac{(अ^2 + ४अक + ४क^2 - अ^2)}{अ} = \frac{४क(अ + क)}{अ}$$ इस लिये इस का दूना

$\frac{८क(अ+क)}{अ}$ यह अपचक्राभद के पूरे चाप का प्रमाण है जिस की उत्पत्ति चलितवृत्त के एक वार समग्र भ्रमण करने से होगी।

८३। इसी प्रकार अतिचक्राभद (Hypocycloid) के चापानयन में भी

$ल^2 = \frac{ग^2(अ^2 - श्रु^2)}{अ}$, जहाँ ग = अ − २क

मानो कि $ग^2 \angle अ^2$ तो $\frac{ताचा}{ताश्रु} = \pm\frac{\sqrt{अ^2 - ग^2}}{अ}\frac{श्रु}{\sqrt{(श्रु^2 - ग^2)}}$ इस पर से पूर्ववत्

$चा = \pm\frac{\sqrt{अ^2 - ग^2}}{अ}\sqrt{श्रु^2 - ग^2} + स्थि$ और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

$चाप = \frac{८क(अ - क)}{अ}$ ।

यदि $ग^2 7 अ^2$ तो पहले सम्वन्ध को अर्थात् $\frac{ताचा}{ताश्रु}$ इस के मान को

$\pm\frac{\sqrt{ग^2 - अ^2}}{अ}\sqrt{\frac{श्रु}{(ग^2 - श्रु^2)}}$ ऐसे लिख सकते हो। इस स्थिति में क 7 अ तब

चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में वक्र के चाप का प्रमाण $\frac{८क(क-अ)}{अ}$ यह

होगा। जब अ = २क तव ग = ० और ल = ०। ऐसी स्थिति में

$\frac{ताचा}{ताश्रु} = १$ इस लिये चा = श्रु + स्थि। और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

चा = २ अ = स्थिरवृत्त का व्यास ।

यदि अ = क तो $ल = \frac{1}{0}$ और $ग^2 = अ^2$, श्रु = अ । ऐसी स्थिति में अतिचक्रालद विन्दु रूप होगा ।

जब $ल^2 = \frac{ग^2(श्रु^2 - अ^2)}{ग^2 - अ^2}$ $\therefore श्रु^2 - ल^2 = \frac{श्रु^2 ग^2 - श्रु^2 अ^2 - ग^2 श्रु^2 + ग^2 अ^2}{ग^2 - अ^2}$

$= \frac{अ^2(ग^2 - श्रु^2)}{ग^2 - अ^2}$ $\therefore \sqrt{ग^2 - श्रु^2} = \frac{\sqrt{ग^2 - अ^2}\sqrt{श्रु^2 - ल^2}}{अ}$ इस का उत्थापन अपचक्रालद के चापमान में देने से चा $= \pm \frac{(ग^2 - अ^2)\sqrt{श्रु^2 - ल^2}}{अ} +$ स्थि

ऐसा भी हो सकता है ।

८४। मूलविन्दु से वक्र के किसी स्पर्श रेखा पर पड़े लम्ब और लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनों के वश से वक्र का चापानयन ।

कल्पना करो किसी वक्र का ना मूलविन्दु नार = र अक्ष, नाय = य अक्ष । व विन्दु की स्पर्शरेखा वल । ना से इस पर पड़ा हुआ लम्ब = ल और ∠लनाय = प है ।

वक्र में मानो कि चाप की गणना अ विन्दु से आरम्भ हो कर व की ओर है । व विन्दु का भुज = य = नाम और कोटि = र = वम । म विन्दु से नाल पर पड़े हुए लम्ब का मूल विन्दु $ल_1$ और $मल_1$ पर व विन्दु से पड़े हुए लम्ब को $वल_2$ समझो । दोनों अक्षों को परस्पर लम्बरूप मान लो ।

त्रिकोणमिति से, नाल = ल = नाम कोज्याप + $वल_2$ = यकोज्याप + रज्याप

और वल = च = नाम ज्याप — $मल_2$ = यज्याप — रकोज्याप

चलनकलन से—कोस्पप $= \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ क्योंकि गणना अ से ब की ओर है इस लिये ज्यों ज्यों र बढ़ेगा त्यों त्यों य की गति ऋण होगी ।

$\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{प}} = \sqrt{१ + \frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = -\text{कोछेप}$ (ऊपर की युक्ति से)

ताप के वश से ल का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{यज्याप} + \text{ज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{रकोज्याप}$$

$$= \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{ज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - (\text{यज्याप} - \text{रकोज्याप})$$

$$= \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{च} = -\text{च}$$

एक वार और तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^२\text{ल}}{\text{ताप}^२} = -\frac{\text{ताच}}{\text{ताप}} = -(\text{ज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्यापय} - \text{कोज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{ज्यापर})$$

$$= -\frac{\text{ज्या}^२\text{प}}{\text{ज्याप}}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल}$$

$$= \text{ज्या}^२\text{पकोछेप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याप कोस्पप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}(\text{ज्या}^२\text{पकोछेप} + \text{कोज्या}^२\text{पकोछेप}) - \text{ल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\text{कोछेप} - \text{ल} = -\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\cdot\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} - \text{ल} = -\text{ल} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$$

इस लिये चलानयन से

$$\int\frac{\text{ता}^२\text{ल}}{\text{ताप}^२}\text{ताप} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = -\int\text{लताप} - \int\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}\text{ताप} = -\int\text{लताप} - \text{चा} = \text{च}\text{-}$$

वा $\text{च} - \text{चा} = \int\text{लताप}$ ।

वक्र के समीकरण पर से और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -$कोस्पप इस से य और र का मान प के रूप में आ सकता है इन का उत्थापन ल में देने से ल भी कोई प का फल होगा फिर चा $= \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int$ल ताप इस पर से चाप का मान जान सकते हो। ब की ओर गणना करने से चा का ऋण चिह्न छोड़ दिया है ।

ऊपर जो प. ल इत्यादि का परस्पर सम्बन्ध दिखलाया है वह सब हम ने चुचरचार नामक ग्रन्थ में लिखा है। बालावबोध के लिये यहाँ भी थोड़ा सा दिखला दिया है।

ऊपर जो ल = यकोज्याप + रज्याप

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ = — च = —यज्याप + रकोज्याप

ये सिद्ध हुए हैं इन पर से

लकोज्याप = यकोज्या प + रज्यापकोज्याप

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ज्याप = —चज्याप = —यज्या प + रज्यापकोज्याप

अन्तर करने से ल·कोज्याप—ज्याप $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ = य
इसी प्रकार ल ज्याप + कोज्याप $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ = र .... (१)

यदि एक ऐसे वक्र का ज्ञान करना हो जिस के चाप पर से उद्दिष्ट $\int$लताप इस का ज्ञान अपेक्षित हो जहाँ ल कोई प का फल है तो (१) समीकरण से स्पष्ट है कि ल, कोज्याप, ज्याप, और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ इन सब पर से उस वक्र का भुज, और कोटि विदित हो जाँयगे।

इसी क्षेत्र में यदि वक्रजातीय वृत्त का केन्द्र ग और व्यासार्द्ध गब = वि मानो (चलनकलन का १७वाँ अध्याय देखो) तो चलनकलन के १६८ और १७१ प्रक्रमों से, वि = श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}$ = $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$, इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ = श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताचा}}$

और च = श्रुकोज्या ∠ नावल = —श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताच}}$

इसलिये — च = $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$।

ना विन्दु से वक्रजातीय व्यासार्द्ध के ऊपर नात लम्ब डालो तो स्पष्ट है कि नात = च = बल। और वक्र के प्रति विन्दु के भिन्न भिन्न जो वक्र-जातीय वृत्तकेन्द्र होंगे उन पर गये हुए वक्र अर्थात् अवलूत (चलन-कलन का १७५ वाँ प्रक्रम देखो) के साथ नात का वैसाही सम्बन्ध रहेगा

जैसा कि ब विन्दु के साथ बल अर्थात् च का है। यदि त विन्दु का अक्षीय भुज युग्म ल', ष' मानें और तग = च' तो

$$ष' = ष - \frac{\pi}{2} \text{ और } ल' = च$$

$$\text{और } गत = च' = -\frac{ताल'}{ताष'} = -\frac{ताल'}{ताष} = -\frac{ताच}{ताष} = \frac{ता^2ल}{ताष^2}$$

क्योंकि अवलूत के लक्षण से गव रेखा अवलूत की स्पर्शरेखा होगी

$$\text{और } वि = बत + तग = ल + च' = ल + \frac{ता^2ल}{ताष^2}$$

$$\text{परंतु } वि = \frac{ताचा}{ताष}, \text{ इस लिये } \frac{ताचा}{ताष} = ल + \frac{ता^2ल}{ताष^2}$$

$$\text{और} \quad चा = \int ल\, ताष + \frac{ताल}{ताष} \text{ यही पहले भी सिद्ध हुआ था।}$$

यदि प्रत्येक स्पर्शरेखाओं के ऊपर ना विन्दु से लम्ब डाले जायँ और उन लम्बमूलों में लगाकर एक वक्र करें और इसके ल विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर ना विन्दु से जो लम्ब पड़ा उसको $ल_1$ कहो तो चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से $\frac{1}{ल_1^2} = \frac{1}{ल^2} + \frac{1}{ल^4} \cdot \frac{ताल^2}{ताष^2}$ (क्योंकि इस वक्र की श्रुति = ल है) इस में $\frac{ताल}{ताष}$ के स्थान में −च का उत्थापन देने से

$$\frac{1}{ल_1^2} = \frac{1}{ल^2} + \frac{च^2}{ल^4} = \frac{ल^2 + च^2}{ल^4} = \frac{श्रु^2}{ल^4}$$

इसलिये $ल_1 = \frac{ल^2}{श्रु}$ यह एक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

ऊपर के क्षेत्र में अ विन्दु से ब की ओर जब $चा = चा_1$ तो $च = च_1$ और जब $चा = चा_2$ तब $च = च_2$ ऐसा मानो तो

$$चा_2 - चा_1 + च_2 - च_1 = \int_{ष_1}^{ष_2} ल ताष \text{ यह उत्पन्न होगा}$$

जहाँ $चा_2$ और $चा_1$ सम्बन्धी $ष_2$ और $ष_1$ है।

ध्रुव स्थान से किसी $ष_1$ में यदि श्रुति का मान $श्रु_1$ और च का मान $च_1$ हो तो स्पष्ट है कि श्रुति नियत अक्ष के चारो ओर घूम कर जब फिर अपने पहले

स्थान पर पहुँचेगी तब प का मान $प_२ = प_१ + २\pi$ यह और $श्रु_२ = श्रु_१$ । $च_२ = च_१$ ऐसी स्थिति में जो सीमित वक्र होंगे

उनके परिधि का मान = $\int_{प_१}^{प_१+२\pi} ल\, ताप$ यही होगा ।

८५। ८४ प्रक्रम के सिद्धान्त की व्याप्ति दिखाने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं ।

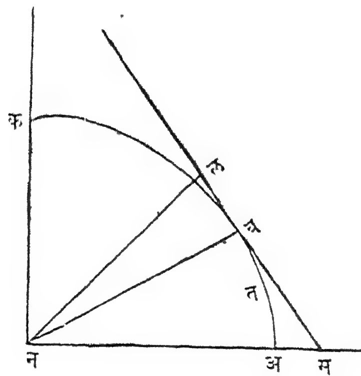
(१) मानो कि अतवक एक दीर्घवृत्त का चतुर्थांश है जिस का केन्द्र न, बृहद्व्यासार्द्ध नअ = अ, लघुव्यासार्द्ध नक = क, व विन्दु की स्पर्शरेखा लवस और उस पर केन्द्र से पड़ा लम्ब नल = ल है तो न को मूलविन्दु मानने से इसका समीकरण $\frac{र^२}{क^२} + \frac{य^२}{अ^२} = १$ यह होगा । यहाँ यदि

$\angle$ लनस = $प_१$ तो ८४ प्रक्रम से ल = यकोज्याप + रज्याप ।

वल = च = यज्याप—रकोज्याप ।

$$और \frac{र^२}{क^२} = १ - \frac{य^२}{अ^२} \therefore \frac{२र}{क^२}\,\frac{तार}{ताय} = -\frac{२य}{अ^२} और \frac{तार}{ताय} = -\frac{य}{र}\,\frac{क^२}{अ^२}$$

(१)



$$और\ ल = यकोज्याप + रज्याप = ज्यापर\left(कोस्पप \times \frac{य}{र} + १\right) \cdots$$

$$= ज्यापर\left[\frac{अ^२}{क^२} कोस्प^२प + १\right] \cdots\cdots (१)$$

$$परन्तु\ \frac{यक^२}{रअ^२} = कोस्पप \therefore \frac{य^२क^४}{र^२अ^४} = कोस्प^२प ।\ \frac{य^२}{र^२} = \frac{अ^४कोस्प^२प}{क^४}$$

और $\frac{\frac{य^2}{अ^2}}{\frac{र^2}{क^2}} = \frac{अ^2 कोस्प^2 ष}{क^2}$ । एक में जोड़ देने से

$\frac{क^2}{र^2} = \frac{अ^2 कोस्प^2 ष + क^2}{क^2}$,

मूल लेने से $\frac{क}{र} = \sqrt{१ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 ष}$ . . . . (२)

$\therefore र = \frac{क}{\sqrt{१ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 ष}}$

इस का उत्थापन (१) में देने से

$ल = ज्याषर\left[\frac{अ^2}{क^2} कोस्प^2 ष + १\right]$

$= ज्याष \frac{क}{\sqrt{१ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 ष}} \{ (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 ष + १ \}$

$= ज्याषक\sqrt{\{ १ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 ष \}}$

$= अ\sqrt{१+इ^2} \sqrt{\{ ज्या^2 ष - इ^2 ज्या^2 ष + कोज्या^2 ष \}} = अ\sqrt{\{ १-इ^2 ज्या^2 ष \}}$

अब $अ\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 ष)}$ इस ल पर से

$अब + बल = अ\int\sqrt{१-इ^2 ज्या^2 ष}$

वक्र में व विन्दु ऐसा कल्पना करें जिसका भु = $य^1$ = अज्याष

और कोटि = $र^1$ = ककोज्याष तो ७७ वें प्रक्रम से

$कत = अ\int\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 ष)}$

इसलिये अब + बल = कत यह सिद्ध हुआ। . . . . (अ)

और व विन्दु का भुज यदि य तो ८४वें प्रक्रम से ल के रूप में य

$= ल कोज्याष - \frac{ताल}{ताष} ज्याष = अकोज्याष\sqrt{१-इ^2 ज्या^2 ष} + \frac{अइ^2 ज्या^2 षकोज्याष}{\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 ष)}}$

$= \frac{अकोज्याष}{\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 ष)}}$ . . . . (क)

(क्योंकि यहाँ $बल = च = -\frac{ताल}{ताष} = \frac{अइ^2 ज्याषकोज्याष}{\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 ष)}}$)

बल के मान में (क) का उत्थापन देने से

वल $= इ^{२} य ज्या प$ । इसी जगह यदि न के भुज का $य' = अ ज्या प$ इस का उत्थापन दें तो

$वल = \frac{इ^{२} य य'}{अ}$ इस पर से और (अ) के रूप से

$$कत — अव = वल = \frac{इ^{२} य य'}{अ}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (ग)$$

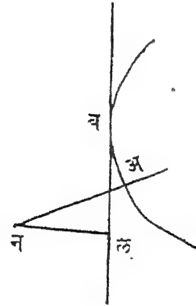
इस सिद्धान्त को फ्यागनानी (Fagnani) ने निकाला है इसलिये उन के आदरार्थ इसे फ्यागनानी का सिद्धान्त (Fagnani's Theorem) कहते हैं। वल का मान चलनकलन के ११वें अध्याय से भी $इ^{२} य ज्या प$ यह निकाल सकते हो।

(क) का वर्ग कर देने से $\frac{अ^{२} - अ^{२} ज्या^{२} प}{१ - इ^{२} ज्या^{२} प} = \frac{अ^{२} — य'^{२}}{१ - \frac{इ^{२} य'^{२}}{अ^{२}}} = य^{२}$

छेदगम कर समशोधन से

$इ^{२} य^{२} य'^{२} — अ^{२} (य^{२} + य'^{२}) + अ^{४} = ०$ इस से यह सिद्ध होता है कि य के स्थान में $य'$ का और $य'$ के स्थान में य का उत्थापन देने से भी पूर्ववत् फल उत्पन्न होगा। इस लिये $कव — अत = \frac{इ^{२} य य'}{अ}$ यह भी होगा

(२)



मानो कि किसी अतिपरवलय का केन्द्र न, अ शिरःस्थान, वल व विन्दु पर स्पर्शरेखा और इस पर न से पड़ा लम्ब नल है।

यहाँ पर भी यदि $\angle$ अनल = ष और नल = ल तो (१) उदाहरण के ऐसा सिद्ध कर सकते हो कि

$$बल — अब = अ \int \sqrt{(१ — इ^{२} ज्या^{२} ष)} \, ताष$$

चलनकलन के १३वें अध्याय से अतिपरवलय के अनन्त दूर की स्पर्श-रेखा अर्थात् असीमपथ निकालो तो उस समय $\frac{तार}{ताय} = \pm \frac{अ}{क}$ इस लिये उस स्थान में प का मान $अ_१$ कहो तो कोस्पअ$_१ = \frac{क}{अ} = \sqrt{इ^२ - १}$ अति-परवलय के लक्षण से उस समय अ स्थान से अनन्त दूर तक जो अतिपरवलय का चाप हो उसको न स्थान से असीमपथ जो हो उसके मान में घटा देने से शेष $= अ \int_०^{अ_१} \sqrt{(१ - इ^२ ज्या^२ प)}\ ताप$ यही होगा।

यह शेष वही है जो ७८ प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हुआ है क्योंकि उस समय अइल यह असीमपथ ही का मान होगा।

८४। प्रक्रम में जो सिद्धान्त दिखलाया है अर्थात् $चा = \frac{ताल}{ताप} + \int लताप$ यह लेजेण्ड्र (Legendre) का निकाला हुआ है (See Traitè des Fanctions Elliptiques)

८६। अति परवलय के चाप का मान जानने के लिये ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc.)

अतिपरवलय का कोई चाप कोई दो दीर्घवृत्तों के चाप से प्रकाशित कर सकते हैं।

किसी त्रिभुज में जहाँ आ, का, गा कोण और उन के संमुख भुज अ, क, ग हैं सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$ग = अकोज्याका + ककोज्याआ। \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

मानो कि शिरःस्थान का वहिर्गत कोण गा = आ + का है। और अ, क दो भुज तो स्थिर और बाक़ी सब अवयव त्रिभुज में चल हैं

तो गा = आ + का और ताआ + ताका = तागा इससे (१) को गुण देने से गतागा = (अकोज्याका + ककोज्याआ) ताआ + (अकोज्याका + क कोज्याआ) ताका चल-ज्ञान करने से

$$\int गतागा = \int अकोज्याकाताआ + \int ककोज्याआताका + २अज्याका + स्थि$$

वा सरलत्रिकोणमिति से

$$\int \sqrt{(अ^२ + क^२ + २अककोज्यागा)}तागा = \int \sqrt{(अ^२ - क^२ ज्या^२ आ)}\ ताआ$$

$$+\int\sqrt{(\text{क}^{२}-\text{अ}^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\text{का})}\,\text{ताका}+\text{२अज्याका}+\text{स्थि}\quad\cdots\cdots\quad(\text{२})$$

परन्तु $\sqrt{(\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}+\text{२अक कोज्यागा})}$

$$=\sqrt{\left\{(\text{अ}-\text{क})^{२}\,\text{ज्या}^{२}\frac{\text{गा}}{\text{२}}+(\text{अ}+\text{क})^{२}\,\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{गा}}{\text{२}}\right\}}$$

इस लिये (२) का रूप

$$\int\sqrt{\left\{(\text{अ}-\text{क})^{२}\,\text{ज्या}^{२}\frac{\text{गा}}{\text{२}}+(\text{अ}+\text{क})^{२}\,\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{गा}}{\text{२}}\right\}}$$

$$=\int\sqrt{(\text{अ}^{२}-\text{क}^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\text{अ})}\,\text{ताआ}+\int\sqrt{(\text{क}^{२}-\text{अ}^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\text{का})}\,\text{ताका}$$

$$+\text{२अज्याका}+\text{स्थि}$$

इस में $\left[\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{अ}+\text{क}}\right]^{२}=\text{१}-\text{इ}^{२},\text{ज्या}^{२}\frac{\text{गा}}{\text{२}}=\text{ज्या}^{२}\text{प}$ ।

$\frac{\text{क}^{२}}{\text{अ}^{२}}=\text{इ}_{१}^{२}$ । $\text{ज्या}^{२}\text{आ}=\text{ज्या}^{२}\text{प}_{१}$ । $\frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}}=\text{इ}_{२}^{२}$ । $\text{ज्या}^{२}\text{का}=\text{ज्या}^{२}\text{प}_{२}$ कल्पना करें

जहाँ अ 7 क तो

$$\text{२}(\text{अ}+\text{क})\int\sqrt{(\text{१}-\text{इ}^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\text{प})}\,\text{ताप}$$

$$=\text{अ}\int\sqrt{(\text{१}+\text{इ}_{१}^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\text{प}_{१})}\,\text{ताप}_{१}+\text{क}\int\sqrt{(\text{१}-\text{इ}_{२}^{२}\,\text{ज्या}^{२}\,\text{प}_{२})}\,\text{ताप}_{२}$$

$$+\text{२अज्याका}+\text{स्थि}\quad\cdots\cdots\quad(\text{३})$$

देखो यहाँ बायें पक्ष का चल उस दीर्घवृत्त के द्विगुण चाप का प्रमाण है जिसका वृहद्व्यास = २ (अ + क) और दहने पक्ष का प्रथम चल उस दीर्घवृत्त का एक चाप है जिसका वृहद्व्यासार्द्ध = अ । दोनों में क्रम से इ और $\text{इ}_{१}$ ऊपर की कल्पना से निष्पत्तिमान है । (७७ वाँ प्रक्रम देखो) इन दोनों के अन्तर तुल्य समीकरण से दहने पक्ष का चल होगा जो कि ८५ वें प्रक्रम के (२) उदाहरण से एक सरल रेखा और उस अतिपरवलय के चाप के अन्तर समान है जिस का लघुव्यास = २क और निष्पत्तिमान = $\frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}}$ यह है ।

इस पर से किसी समय में ८५ वें प्रक्रम के (२) उदाहरण से बल का मान जान कर और २अज्याका के ज्ञान से दोनों दीर्घवृत्तों के चापों पर से अतिपरवलय का चाप जान सकते हैं ।

जब सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

अज्याका = कज्याआ । गा = आ + का

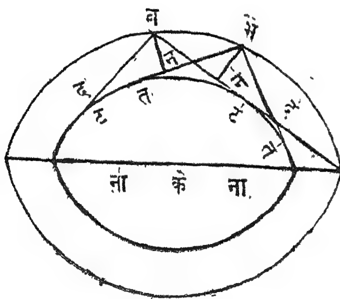
इसलिये आ ० से लेकर π तक जब पहुँचेगा तो गा भी ० से लेकर π तक पहुँचेगा। और अज्याका = कज्याआ के नियम से उस समय का ० लेकर $\text{अ}_{१}$ (जहाँ $\text{अ}_{१} = \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{क}}{\text{अ}}$) तक पहुँच कर फिर घटते घटते ० तक आजायगा। ऐसी स्थिति में ककोज्याआ और ताका दोनों ऋण होंगे इसलिये ककोज्याआ ताका सर्वदा धन रहेगा तब सान्त-चलानयन से (३) का रूप

$$२(\text{अ} + \text{क}) \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \sqrt{(१ - \text{इ}^{२} \text{ज्या}^{२} \text{प})}\ \text{ताप}$$

$$= २\text{अ} \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \sqrt{(१ - \text{इ}_{१}^{२} \text{ज्या}^{२} \text{प}_{१})}\text{ताप}_{१} + २\text{क} \int_{०}^{\text{अ}_{१}} (१ - \text{इ}_{२}^{२} \text{ज्या}^{२} \text{प}_{२})\text{ताप}_{२}$$

ऐसा होगा। इस में दो का भाग दे कर समशोधन से यह दिखला सकते हो कि अतिपरवलय का अनन्त चाप और असीमपथ का अन्तर दो दीर्घवृत्तों के चतुर्थांश परिध्यन्तर तुल्य है। यह भी ल्याण्डेन (Landen) की कल्पना है।

८७। डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr. Graves) कल्पना करो कि एक नाभिक दो दीर्घवृत्त हैं। बड़े दीर्घवृत्त के परिधि में कोई व विन्दु लेकर छोटे दीर्घवृत्त पर वहाँ से वट, वट′ दो स्पर्शरेखा डालो तो वट और वट′ के योग में दीर्घवृत्त का टट′ चाप घटा दो तो शेष सर्वदा स्थिर रहेगा



व विन्दु के अत्यन्त निकट बड़े दीर्घवृत्त में एक भ विन्दु कल्पना करो और वहाँ से छोटे दीर्घवृत्त पर भत, भत′ दो स्पर्शरेखा खींचो इन दोनों का पहली स्पर्शरेखा में क्रम से द और द′ विन्दु पर योग समझो। वट′ पर भन′ और भत पर बन लम्ब समझो।

देखो दोनों दीर्घवृत्त एक नाभिक हैं इस लिये दीर्घवृत्त लक्षण से ∠बभन = ∠भवन′ ∴ वन′ = भन

और वट = टद + दन = टद + दत + तन = टत + तन = टत + तभ—भन।

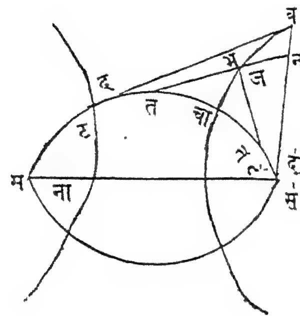
इसी तरह वट′ = बन′ + त′भ—ट′त′।

दोनों के योग से वट + वट′ = भत + भत′ + टत–ट′त′।

दोनों में टट′ चाप को घटा देने से वट + वट′−टट′ = भत + भत′−तत′

अर्थात् व विन्दु यदि भ पर हो तो भी शेष वही रहता है। इसी प्रकार थोड़ा थोड़ा विन्दुओं को हटा हटा सर्वत्र दिखला सकते हो कि शेष एक ही रहेगा।

८८। इसी तरह यदि एक अतिपरवलय और एक दीर्घवृत्त दोनों एक नाभिक हों तो अतिपरवलय के किसी विन्दु से जो दो स्पर्शरेखा दीर्घवृत्त में होंगी उनका अन्तर स्पर्शरेखान्तर्गत अतिपरवलय और दीर्घवृत्त का जो सम्पात विन्दु है वहाँ से दोनों स्पर्श विन्दु तक जो दीर्घवृत्त के दो चाप होंगे उनके अन्तर तुल्य होता है। क्योंकि यहाँ भी जो ऊपर की क्रिया करो तो वट = टद् + द्न = टद् + द्त + तन = टन + भत + भन



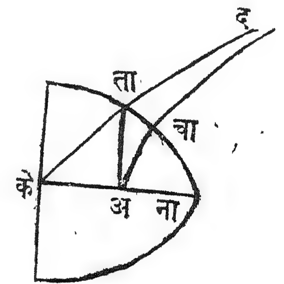
इसी तरह वट′ = ट′द′ + न′द′ + वन′ = ट′द′ + त′द′ + भत′ + वन′ = ट′त′ + भत′ + वन′

दोनों का अन्तर करने से (वट−वट′) = टत−ट′त′ + (भत−भत′) और टचा—ट′चा = अ = टत + तचा—(ट′त′ + त′चा)

इन दोनों का अन्तर करने से (वट—वट′)—अ = (भत—भत′)—(तचा—त′चा)

इसी प्रकार भ को बदलने से दो दो पक्ष समान होते जाँयगे अन्त में जब भ,चा के पास आवेगा तब स्पर्शरेखान्तर और चापान्तर दोनों शून्य हो जाँयगे इसलिये (वट—वट′)— (टचा— ट′चा) = ० अर्थात् वट—वट′ = टचा—ट′चा।

यदि दीर्घवृत्त के परिधि ही में कोई विन्दु लेकर अतिपरवलय ही पर दो स्पर्शरेखा डाली जाय तौ भी यहाँ पर यही सिद्धान्त ठीक ठहरेगा यदि दोनों स्पर्शरेखायें अतिपरवलय के एक ही शाखा पर हों।



इस पर से असीमपथ और अतिपरवलय का अनन्त-चाप इनका अन्तर सरलरेखा और अतिपरवलय के चाप रूप में प्रकाश कर सकते हैं। जैसे कल्पना करो कि अचा अतिपरवलय का असीमपथ केतद् है और अ विन्दु की स्पर्शरेखा अत है त विन्दु में लगाकर अति परवलय के साथ एक एकनाभिक

दीर्घवृत्त बनाया तो ऊपर के सिद्धान्त से अनन्त दूर पर तद को स्पर्शरेखा समझ लेने से तद—अत = चादचाप—अचा

केत + अचा इसको जोड़ देने से

तद + केत—अत + अचा = चाद + अचा—अचा + केत

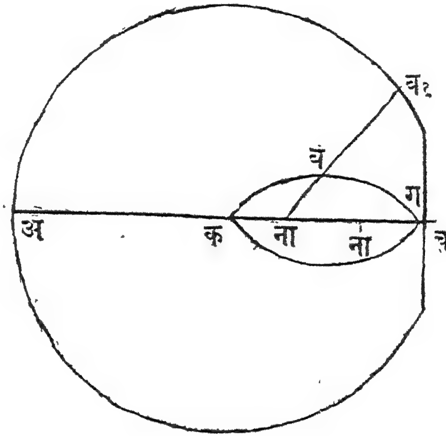
अर्थात् केद—अत + अचा = अद—अचा + केत

समशोधन से केद—अद = अत + केत—२अचा

इसलिये केत और अत के योग में दूने अचा को घटा देने से शेष असीम-पथ और अतिपरवलय सम्बन्धि अनन्त चाप का अन्तर होता है यह सिद्ध हुआ।

८९। डिकार्टस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन।

इसकी दोनों नाभी ना, ना′ हैं नाभी से वक्र के किसी विन्दु ब तक जो रेखा है उन में त·श्रु + द·श्रु′ = न·ग यह नियम है जहाँ त, द और न स्थिराङ्क हैं नाना′ = ग, नाब = श्रु। ना′ब = श्रु′ यहाँ यदि ∠बनाना′ = ष तो सरलत्रिकोणमिति से



$$\text{श्रु}'^2 = \text{श्रु}^2 + \text{ग}^2 - 2\,\text{श्रुगकोज्याष}$$

$$= \left[\frac{\text{न}\cdot\text{ग} - \text{श्रु}\cdot\text{त}}{\text{द}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\text{न}^2\text{ग}^2 - 2\,\text{तनगश्रु} + \text{श्रु}^2\text{त}^2}{\text{द}^2}\right]$$

छेदगम और समशोधन से

$$\text{श्रु}^2(\text{द}^2 - \text{त}^2) - 2\,\text{श्रुग}(\text{द}^2\text{कोज्याष} - \text{तन}) - \text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2) = 0$$

$$\text{वा}\quad \text{श्रु}^2 - \frac{2\,\text{श्रुग}(\text{द}^2\text{कोज्याष} - \text{तन})}{\text{द}^2 - \text{त}^2} - \frac{\text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{द}^2 - \text{त}^2}$$

$$\text{अथवा}\ \text{श्रु}^2 - 2\,\text{श्रुग}\ \frac{\text{तन} - \text{द}^2\text{कोज्याष}}{\text{त}^2 - \text{द}^2} + \frac{\text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = 0$$

इस में यदि $\text{ग}\ \dfrac{(\text{तन} - \text{द}^2\text{कोज्याष})}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = \text{प}_1$। और

$$\frac{(ग^२ न^२ — द^२)}{त^२ — द^२} = आ \quad तो$$

$$श्रु^२ — २प_१ श्रु + आ = ० \qquad \cdot\cdot \qquad \cdot\cdot \qquad (१)$$

इस पर से $श्रु = प_१ \pm \sqrt{प_१^२ — आ}$ वा $नाव_१ = व_१ + \sqrt{प_१^२ — आ}$ ।

$नाव = प_१ — \sqrt{प_१^२ — आ}$ इस से सिद्ध होता है कि यदि त, द, न सम्भाव्य और अतुल्य संख्या हों तो

इस वक्र में दो आवल होंगे एक बाहर में और दूसरा भीतर में रहेगा जैसा कि इस क्षेत्र में देख पड़ता है।

अब यहाँ (१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताश्रु}{ताप} \cdot \frac{१}{श्रु} = \frac{प'_१}{\sqrt{प_१^२ — आ}} \text{ जहाँ } प'_१ = \frac{ताप_१}{ताप}$$

इस पर से

$$\frac{ताचा}{ताप} \cdot \frac{१}{श्रु} = \frac{\sqrt{प_१^२ + प'^२_१ — आ}}{\sqrt{(प_१^२ — आ)}}$$

$$वा\ चा = \int \frac{प_१ \sqrt{(प_१^२ + प'^२_१ - आ)} ताप}{\sqrt{(प_१^२ - आ)}} \pm \int \sqrt{(प_१^२ + प'^२_१ - आ)}\ ताप$$

यहाँ धन चिह्न बाहरी आवल के लिये और ऋण चिह्न भीतरी के लिये है।

इस लिये दोनों के सजातीय चापों का अन्तर $= २ \int \sqrt{(अ_१^२ + प'^२_१ - आ)} ताप$

$$= २ \int \sqrt{(अ^२ + २अक\ कोज्याप + क^२ — आ)} ताप \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (२)$$

$$यदि\ प_१ = \frac{ग(तन - द^२\ कोज्याप)}{त^२ — द^२} = अ + क\ कोज्याप ।$$

देखो (२) का रूप ८६ प्रक्रम से एक दीर्घवृत्त के चाप समान हो सकता है इस लिये दोनों आवलों के सजातीय चापों का अन्तर एक दीर्घवृत्त के चाप रूप में प्रकाशित कर सकते हैं। इस सिद्धान्त को राबर्टस ने निकाला है (Mr. W. Roberts) त, द, और न, के भिन्न भिन्न मानों पर से यही आवल, वृत्त, दीर्घवृत्त, अतिपरबलय इत्यादि का रूप हो जायगा इस लिये आवल को इन सब वक्रों का उत्पादक कह सकते हैं।

९०। यदि किसी वक्रक्षेत्र के अनवलूत का समीकरण मालूम हो तो चलन-कलन के १७९वें प्रक्रम के (३) समीकरण से चलज्ञान के बिना ही वक्र के चाप का

ज्ञान हो सकता है क्योंकि अनवलूत समीकरण पर से $चा' \pm वि = ट$ इस में जो वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध वि है उस का मान अनवलूत के भुजकोटि रूप में ला सकते हैं और ये भुजकोटि अवलूत के भुजकोटि रूप में आ सकते हैं इस प्रकार अनवलूत के समीकरण पर से वि का ज्ञान हो जायगा फिर स्थिर ग के वश से चाप का मान भी विदित हो जायगा।

जैसे यदि उस परवलय को अनवलूत कल्पना करो जिसका $र^2 = ४अय$ यह समीकरण है तो चलनकलन के १७८ प्रक्रम के (१) उदाहरण से अवलूत का समीकरण $२७ अ र'^2 = ४(य' - २अ)^3$ और $वि = २अ\left[\frac{य' + अ}{३अ}\right]^{\frac{3}{2}}$ यह होगा इस लिये $चा' \pm २अ\left[\frac{य' + अ}{३अ}\right]^{\frac{3}{2}} = ट$। यहाँ चाप की गणना यदि उस विन्दु से करें जिस का $भु = य' = २अ$ अर्थात् उस विन्दु से जो कि परवलय के शिरोविन्दु के सजातीय है तो क्षेत्र के देखने से विदित होता है कि वहाँ $चा' = ०$ इस लिये

$ट = -२अ$ ऋण चिह्न ग्रहण करने से क्योंकि यहाँ ज्यों ज्यों $य'$ बढ़ेगा त्यों त्यों $चा'$ भी बढ़ेगा इसलिये $चा' = २अ\left[\frac{य' + अ}{३अ}\right]^{\frac{3}{2}} - २अ$

यदि यहाँ वक्र के $२७अर^2 = ४(य - २अ)^3$ इस समीकरण पर से $\frac{ताचा}{ताय}$ का मान जान कर चलज्ञान से चाप का आनयन करो तो भी ऊपर आया हुआ मान आजायगा।

९१। वक्र के भुज कोटि के रूप में यदि चाप का मान विदित हो तो उस के अनवलूत का समीकरण जान सकते हैं।

चलनकलन के १७६ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{\frac{तार'}{ताय}}{य - य'} = \pm \frac{१}{वि} \cdot \frac{ताचा'}{ताय'}$$ जहाँ य अनवलूत का भुज है

$$\text{समशोधनादि से } य = य' \mp वि\,\frac{ताय'}{ताचा'} \qquad (१)$$

$$\text{इसी तरह } र = र' \mp वि\,\frac{तार'}{ताचा'} \qquad (२)$$

यदि चा', य' और र' के रूप में विदित हो और वक्र का समीकरण जानते हों तो $\frac{\text{ता}\,\text{चा}'}{\text{ता}\,\text{य}'}$ और $\frac{\text{ता}\,\text{चा}'}{\text{ता}\,\text{र}'}$ जान सकते हैं और वि, चा' $\pm$ वि = ट इस समीकरण समीकरण पर से जान जायँगे फिर इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से अनवलूत का भुज कोटि जान जायँगे।

जैसे किसी कातन्वली (The Catenary) का समीकरण

$$\text{र}' = \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right)$$

और

$$\text{चा}' = \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right) \text{ यह है।}$$

यहाँ मान लो कि चाप की गणना उस विन्दु से है जिस का भु = य' = ० और को = र' = ग अब इन पर से कातन्वली के अनवलूत (Involute) का समीकरण जान जायँगे जिस की प्रवृत्ति वक्र के निर्दिष्ट विन्दु (जिस के भुज कोटि का मान अभी मान लिया है) के वश से होगी।

अब ऊपर के र' और चा' के मान से

$$\frac{\text{ता}\,\text{र}'}{\text{ता}\,\text{य}'} = \frac{१}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right) = \frac{\text{चा}'}{\text{ग}}$$

$$\frac{\text{ता}\,\text{चा}'}{\text{ता}\,\text{य}'} = \frac{१}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right) = \frac{\text{र}'}{\text{ग}}$$

भाग देने से

$$\frac{\text{ता}\,\text{र}'}{\text{ता}\,\text{चा}} = \frac{\text{चा}'}{\text{र}'}, \text{ और } \frac{\text{ता}\,\text{य}'}{\text{ता}\,\text{चा}'} = \frac{\text{ग}}{\text{र}'}$$

और यहाँ ऐसी ही कल्पना किया है कि चा' = ० तो वि = ० इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा। तब चा' = वि।

इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से

$$\text{य} = \text{य}' - \frac{\text{चा}'\cdot\text{ग}}{\text{र}'}, \quad \text{र} = \text{र}' - \frac{\text{चा}'^{२}}{\text{र}'} = \frac{\text{र}'^{२} - \text{चा}'^{२}}{\text{र}'} = \frac{\text{ग}^{२}}{\text{र}'}$$

$$\text{और } \text{चा}' = \sqrt{(\text{र}'^{२} - \text{ग}^{२})} = \sqrt{\left[\frac{\text{ग}^{४}}{\text{र}^{२}} - \text{ग}^{२}\right]} = \frac{\text{ग}}{\text{र}}\sqrt{\text{ग}^{२} - \text{र}^{२}}$$

इस लिये $\frac{चा'}{र'} = \frac{\sqrt{(ग^2 - र^2)}}{ग}$, इस तरह से $य' = य + \sqrt{(ग^2 - र^2)}$ इस का उत्थापन वक्र के समीकरण में देने से

$$र' = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} + इ^{-\frac{य'}{ग}}\right)$$

इस लिये $\sqrt{(र'^2 - ग^2)} = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} - इ^{-\frac{य'}{ग}}\right)$

जोड़ देने से $र' + \sqrt{(र'^2 - ग^2)} = ग इ^{\frac{य'}{ग}}$

लघुरिक्थ लेने से $य' = ग \cdot ला \frac{र' + \sqrt{(र'^2 - ग^2)}}{ग}$

इसी तरह $य + \sqrt{(ग^2 - र^2)} = ग \cdot ला \frac{ग + \sqrt{(ग^2 - र^2)}}{र}$

इस वक्र को अङ्गरेजी में (Tractory) कहते हैं हमने इस का नाम त्रीतर रखा है। इस में यदि $ग > र$ तो मूल का मान द्विविध आवेगा प्रत्येक य के मान में। ये दोनों मान संख्या में तुल्य परन्तु भिन्न चिह्न के होंगे। चलनकलन से यदि इस की आकृति बनावो तो जान पड़ेगा कि जहाँ $य = ०$ और $र = ग$ वहाँ वक्र को एक स्कन्ध होगा जिस में य अक्ष असीमपथ होगा।

९२। यदि अवलूत के चाप का मान अक्षीय भुजयुग्म का फल हो तो ऊपर की युक्ति से अनवलूत का समीकरण भी अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी जान सकते हो।

चलनकलन के १७७ प्रक्रम के (१) और (२) समीकरण से

$$श्रु'^2 = श्रु^2 + वि^2 - २ ल \cdot वि \quad \ldots\ldots (१)$$

$$ल'^2 = श्रु^2 - ल^2 \quad \ldots\ldots (२)$$

यहाँ भी पहले के ऐसा स्वरविशिष्टवर्ण ज्ञात वक्र के हैं अर्थात् अवलूत के और केवल वर्ण अनवलूत के हैं। अवलूत तो ज्ञात ही है और इसी लिये $ल'$, और $श्रु'$ का भी सम्बन्ध विदित ही होगा और $चा' \mp वि = ट$ इसलिये यदि $चा'$ का मान $ल'$ $श्रु'$ के रूप में आ सके तो इस के वश से (१) और (२) में $श्रु'$, $ल'$ को उड़ा सकोगे और एक समीकरण ल और श्रु में सम्बन्ध दिखाने वाला अनवलूत का ज्ञात हो जायगा।

जैसे समाश्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) में (चलनकलन का २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो) यदि $\text{भ} = \text{स्प}^{-1}\text{क}$ तो

$$\text{ल}' = \text{श्रु}'\,\text{ज्याभ}$$

यहाँ यदि अनवलूत की प्रवृत्ति सर्पिल के ध्रुवविन्दु ही से मानें और उसी विन्दु से यदि चा के गणना का भी आरम्भ करें तो $\text{वि} = \text{चा} = \text{श्रु}'\text{छेभ}$ (८१वाँ प्रक्रम देखो) इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\text{श्रु}'^2 = \text{श्रु}^2 + \text{श्रु}'^2\cdot\text{छे}^2\cdot\text{भ} - 2\text{श्रु}'\,\text{ल}\,\text{छेभ}$$

$$= \text{श्रु}'^2\cdot\text{छे}^2\text{भ} + \text{श्रु}'^2\cdot\text{ज्या}^2\text{भ} + \text{ल}^2 - 2\text{श्रु}'\,\text{ल}\cdot\text{छेभ} \text{ । (२) से}$$

इस वर्गसमीकरण पर से

$$\text{ल} - \text{श्रु}'\cdot\text{छेभ} = \pm\, \text{श्रु}'\cdot\text{कोज्याभ}$$

यदि यहाँ धन चिह्न ग्रहण करें तो $\text{ल} = \dfrac{\text{श्रु}'(1 + \text{कोज्या}^2\text{न})}{\text{कोज्याभ}}$ और (२) से

$$\text{श्रु}'^2 = \frac{1 + 3\text{कोज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्या}^2\text{भ}}\,\text{श्रु}'^2 \text{ इस पर से } \text{श्रु}\,\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \text{वि}$$

$$= \frac{1 + 3\text{कोज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्याभ}(1 + \text{कोज्या}^2\text{भ})}\,\text{श्रु}'$$

परन्तु वक्र के समीकरण से $\text{वि} = \text{श्रु}'\cdot\text{छेभ}$ इस लिये धन चिह्न ग्रहण करने से मान असम्भव आता है । इस लिये ऋण चिह्न लेकर क्रिया करने से

$$\text{ल} = \frac{\text{श्रु}'\text{ज्याभ}}{\text{कोज्याभ}} \text{ और तब (२) से } \text{श्रु}^2 = \frac{\text{श्रु}'^2\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्या}^2\text{भ}} \;\therefore\; \text{श्रु}' = \frac{\text{श्रुकोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

इस का उत्थापन ल में देने से $\text{ल} = \text{श्रु}\,\text{ज्याभ}$ । देखो यह अनवलूत का समीकरण ठीक अवलूत ही के समीकरण के ऐसा है ।

९३। यदि वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उस के फल रूप में चाप का मान जानना हो तौ भी $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान उस स्पर्शरेखा के फल रूप में जान कर चाप का मान जान सकते हो ।

जैसे मानो कि किसी वक्र का समीकरण $\text{र} = \text{फ}(\text{य})$ मूल विन्दु वक्र ही के चाप का कोई विन्दु है और उसी विन्दु पर र अक्ष स्पर्शरेखा भी है तो वक्र के समीकरण से $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}'(\text{य}) = \text{स्पव} = \dfrac{1}{\text{स्पव}_1}$ (चलनकलन

के ११६ वें प्रक्रम से) जहाँ $व_१$ र अक्ष और वक्र की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है।

अब ऊपर के समीकरण से स्पव$_१$ के फल रूप में य का मान जान जावोगे मानो कि य = फा (स्पव$_१$) तो

$$\frac{ताय}{ताव_१} = फा' (स्पव_१)\ छे^२व_१$$

और $\frac{ताचा}{ताय} =$ कोछेव$_१$

इस लिये $\frac{ताचा}{ताव_१} = फा' (स्पव_१)\ छे^२व_१\ कोछेव_१$

इस समीकरण पर से $व_१$ के फल रूप में चा का मान जान सकते हो यदि वक्र के एक विन्दु पर य अक्ष स्पर्श रेखा हो और उसी नियत विन्दु से चाप का मान जानना हो तो ऊपर ही की युक्ति से समीकरण वना सकते हो केवल $व_१$ के स्थान में व को लेना होगा।

जैसे चक्रालद (Cycloid) में (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (११) वक्र देखो)

$$\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{२अ—य}{य}} = \frac{१}{स्पव_१}\ ।$$

इस लिये $\frac{२अ}{य} = \frac{१}{ज्या^२व_१}$ और य = २अज्या^{२}व$_१$

$$\frac{ताय}{ताव_१} = ४अज्याव_१\cdot कोज्याव_१$$

$$\frac{ताचा}{ताव_१} = कोछेव_१,\ \frac{ताय}{ताव_१} = ४अकोज्याव_१$$

इस लिये चा = ४अ·ज्याव$_१$ + स्थि

यदि चाप की गणना उस विन्दु से करें जहाँ र अक्ष स्पर्शरेखा है तो स्थिराङ्क शून्य होगा।

इस प्रकार से वक्र के दो स्पर्शरेखाओं से उत्पन्न कोण और वक्र के चाप के वीच सम्वन्ध दिखाने वाले समीकरण को वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण कहते हैं।

९४। यदि वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण दिया हो तो उस पर से साधारण वक्र का समीकरण विपरीत क्रिया से जान सकते हैं।

क्योंकि चापस्पार्शिक समीकरण पर से जानते हैं कि

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{ज्याब}_1$$

इसलिये $\text{य} = \int \text{ज्याब}_1 \text{ताचा}$

और इसी तरह $\text{र} = \int \text{कोज्याब}_1 \text{ताचा}$

चापस्पार्शिक समीकरण से जानते हैं कि चा कोई ब_1 का फल है इसलिये य, और र का मान ऊपर के चलज्ञान से आजायगा।

जैसे (१) चक्राभद (Cycloid) में जानते हैं कि चापस्पार्शिक समीकरण $\text{चा} = ४\text{अज्याब}_1$ यह है

इसलिये $\text{ताचा} = ४\text{अकोज्याब}_1 \text{ताब}_1$

इस का उत्थापन य के मान में देने से

$\text{य} = \int \text{ज्याब}_1 \text{ताचा} = ४\text{अ} \int \text{ज्याब}_1 \text{कोज्याब}_1 \text{ताब}_1$

$= \text{स्थि} - \text{अकोज्याब}_1$ इसी तरह, $\text{र} = \int \text{कोज्याब}_1 \text{ताचा}$

$= ४\text{अ} \int \text{कोज्या}^2 \text{ब}_1 \text{ताब}_1 = \text{स्थि}_1 + २\text{अब}_1 + \text{अज्या}२\text{ब}_1$

इस लिये यहाँ दोनों समीकरणों पर से य वा र के फल रूप में ब_1, ज्याब_1, कोज्याब_1 का मान ले आने से य और र के सम्बन्ध पर से वक्र का समीकरण आजायगा।

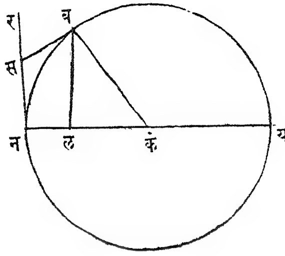
यदि दोनों अक्षों का योगविन्दु वक्र का शिरः स्थान मानें तो $\text{स्थि} = \text{अ}$ और $\text{स्थि}_1 = ०$

(२) इसी तरह वृत्त का चापस्पार्शिक समीकरण $\text{चा} = \text{अ}\cdot\text{ब}_1$ यह है इस पर से $\text{ताचा} = \text{अताब}_1$

और $\text{य} = \int \text{ज्याब}_1 \text{ताचा} = \text{अ} \int \text{ज्याब}_1 \text{ताब}_1 = - \text{अकोज्याब}_1 + \text{स्थि}$

इसी तरह $\text{र} = \int \text{कोज्याब}_1 \text{ताचा} = \text{अ} \int \text{कोज्याब}_1 \text{ताब}_1$

$= \text{अज्याब}_1 + \text{स्थि}_1$ यदि नियत स्पर्शरेखा और व्यासार्द्ध के योगविन्दु ही को मूलस्थान मानें तो $\text{स्थि} = \text{अ}$ और $\text{स्थि}_1 = ०$ इन का उत्थापन देकर य और र के सम्बन्ध से समीकरण $\text{र}^2 = \text{अ}^2 - (\text{अ} - \text{य})^2$।



जैसे यदि न विन्दुगत स्पर्शरेखा नस को नियत स्पर्शरेखा मानो और किसी व विन्दु की स्पर्शरेखा बस तो ∠ वसर = $व_१$ और वृत्त के धर्म से $व_१$ = ∠ वकेन। के को केन्द्र समझो इस लिये नव = चा = अ·$व_१$ (जहाँ अ = केन = वृत्तव्यासार्द्ध)। इस लिये यदि नसर को र, अक्ष और नकेय को य अक्ष। और न को मूलविन्दु मानो तो व विन्दु की कोटि = बल = र = $\sqrt{अ^२—(अ—य)^२}$ यही समीकरण पहले भी सिद्ध हुआ था।

(३) इसी तरह चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (१३) वक्र अपचक्रालद (Epicycloid) के लक्षण से यदि अ को नियतविन्दु मानो उसी स्पर्शरेखा य अक्ष ही है इस लिये इस अक्ष को नियत स्पर्शरेखा मान लेने से चाप-स्पार्शिक समीकरण से

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{कोज्याष—कोज्या\frac{अ+क}{क}ष}{ज्या\frac{अ+क}{क}ष—ज्याष} = स्पव_१$$

$$= \frac{२ज्या\frac{अ+२क}{२क}ष\cdot ज्या\frac{अ}{२क}ष}{२ज्या\frac{अ}{२क}ष\, कोज्या\frac{अ+२क}{२क}ष} = स्प\frac{अ+२क}{२क}ष$$

इस लिये $व_१ = \frac{अ+२क}{२क}ष$

और ८२ प्रक्रम से

$$चा = —\frac{\sqrt{(ग^२—अ^२)}}{अ}\sqrt{ग^२—श्रु^२} + स्थि$$

परन्तु वक्र के लक्षण से

$$य^२ = (अ+क)^२कोज्या^२ष—२(अ+क)\, क\, कोज्याषकोज्या\frac{अ+क}{क}ष$$
$$+ क^२कोज्या^२\frac{अ+क}{क}ष$$

$$र^२ = (अ+क)^२ज्या^२ष — २(अ+क)\, क\, ज्याषज्या\frac{अ+क}{क}ष$$
$$+ क^२ज्या^२\frac{अ+क}{क}ष$$

$$श्रु^२ = य^२ + र^२ = (अ+क)^२$$

$$— २क(अ+क)\left\{ज्या\frac{अ+क}{क}षज्याष + कोज्या\frac{अ+क}{क}षकोज्याष\right\} + क^२$$

$$ग^२ = (अ+२क)^२ = अ^२ + ४अक + ४क^२$$

$ग^2 — श्रु^2 = २अक + २क^2 + २क\ (अ + क)$ कोज्या $\frac{अ}{क}$ प

$= २क\ (अ + क)\ \{ १ +$ कोज्या $\frac{अ}{क}$ प $\} = ४क(अ + क)$ कोज्या^{2} $\frac{अ}{२क}$ प

$\therefore \sqrt{ग^2 — श्रु^2} = \sqrt{\{४क\ (अ + क)\}}$ कोज्या $\frac{अ}{२क}$ प

और $\sqrt{ग^2 — अ^2} = \sqrt{४क\ (अ + क)}$

चाप में इन का उत्थापन देने से

चा = —४क (अ + क) कोज्या $\frac{अ}{२क}$ प + स्थि

$= \frac{४क(अ+क)}{अ}$ (१—कोज्या $\frac{अप}{२क}$)

यदि चाप की गणना वहाँ से करें जहाँ प = ०

परन्तु प = $\frac{२कव_1}{अ + २क}$ इस लिये चा = $\frac{४क(अ + क)}{अ}\left[१—\text{कोज्या}\ \frac{अव_1}{अ + २क}\right]$

यदि यहाँ $व_1 = \frac{\pi(अ + २क)}{२अ} + व'_1$

तो $\frac{अव_1}{अ + २क} = \frac{\pi}{२} + \frac{अव'_1}{अ + २क}$ $\therefore$ कोज्या $\frac{अव_1}{अ + २क}$ = —ज्या $\frac{अव'_1}{अ + २क}$

इस लिये यदि $\frac{४क(अ + क)}{अ}$ ज्या $\frac{अव'_1}{अ + २क}$ = चा' तो

चा = $\frac{४क(अ+क)}{अ}$ + चा'

यहाँ स्पष्ट है कि वक्र के उच्च स्थान से यदि चा की गणना करें तो

$$चा' = \frac{४क(अ + क)}{अ}\ ज्या\ \frac{अव'_1}{अ + २क}$$

यहाँ स्वर चिह्न का कुछ भी प्रयोजन नहीं यदि उच्चगत स्पर्शरेखा को नियत स्पर्शरेखा मान लें क्योंकि उस से और इष्टस्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण तब $व'_1$ यही होगा

इसलिये उच्चस्थान से गणना करने में

$$चा = \frac{४क(अ + क)}{अ}\ ज्या\ \frac{अव_1}{अ + २क}\ ।$$

इसी तरह अतिचक्राभ्द (Hypocycloid) में नीचस्थान से यदि चाप गणना करो तो चा = $\frac{४क(अ—क)}{अ}$ ज्या $\frac{अव_1}{अ—२क}$ यह समीकरण होगा ।

दोनों समीकरणों का रूप चा = ट ज्यानव$_1$ ऐसा कह सकते हो

प्रथम में ट = $\frac{४(अ+क)}{अ}$, न = $\frac{अ}{अ+२क}$ ∠ १ और दूसरे में

$ट = \frac{४(अ-क)}{अ}$, $न = \frac{अ}{अ-इक} > १$ इतना ही विशेष है।

(४) कातन्वली का समीकरण यदि

$र + ग = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$ ऐसा मानें जिस में र अक्ष और वक्र के योग विन्दु को मूल मानें तो

$\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}\left[इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right]$। $चा = \frac{ग}{२}\left[इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right]$

इस लिये मूलविन्दुगत स्पर्शरेखा से इष्टस्पर्शरेखा जो कोण बनावे उसे $ब_१$ कहो तो $चा = ग\cdot स्पब_१$ ऐसा होगा। इस प्रकार से कातन्वली (Catenary) का चापस्पार्शिक समीकरण उत्पन्न हो गया।

९५। यदि चापस्पार्शिक समीकरण से वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध ले आवें तो चलनकलन के १७१ वें प्रक्रम से

$वि = \frac{ताचा}{ताब}$ (जहाँ $ब = ब_१$) ऐसा होगा।

जैसे लाघुरिक्थिक सर्पिल में ८१ प्रक्रम से

$चा = श्रु\sqrt{क^२ + १}$ } यदि ध्रुव स्थान से चाप गणना करें

$= श्रु\ छेभ$ } और चलनकलन के १३१वें प्रक्रम से

$ल = श्रु\cdot ज्याभ \therefore \frac{ताल}{ताश्रु} = ज्याभ$ इसलिये चलनकलन के १६८ वें प्रक्रम से

$वि = श्रु\cdot\frac{ताश्रु}{ताल} = श्रु\cdot\frac{१}{ज्याभ}$

वि का भाग चा में देने से $\frac{चा}{वि} = ज्याभ\cdot छेभ = स्थि$ इस से सिद्ध होता है कि लाघुरिक्थिक सर्पिल में चाप और वक्रजातीय वृत्त के व्यासार्द्ध में स्थिर सम्बन्ध है। मानो कि $वि = चा\cdot त$ जहाँ त कोई स्थिराङ्क है तो $वि = चा\cdot त = \frac{ताचा}{ताब}$ इसलिये $ताब\ त = \frac{ताचा}{चा}$

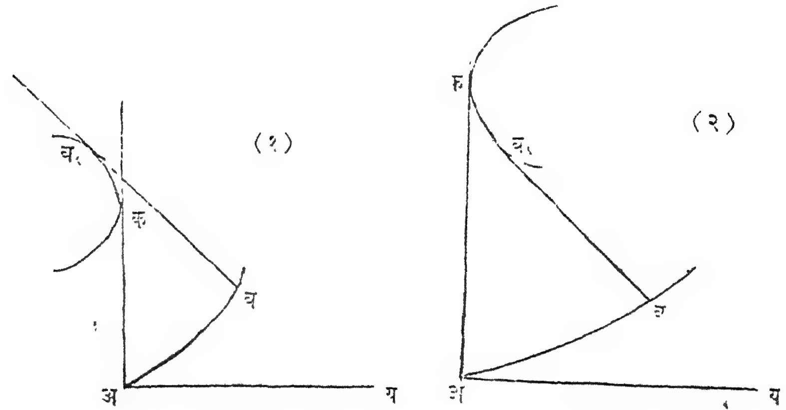
चलानयन से $त\cdot ब + स्थि_१ = लाचा$

इसलिये $चा = अ\ इ^{त\cdot ब}$ जहाँ अ कोई स्थिराङ्क है

यदि $चा = चा' + अ$ तो $चा' = अ\left(इ^{त\cdot ब} - १\right)$

अब इस में $चा'$ वहाँ से परिगणित है जहाँ $ब = ०$

९६। यदि वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अवलूत का भी समीकरण जान सकते हैं



कल्पना करो कि अब एक वक्र है जिस के अवलूत की आकृति कब, है। मान लो कि अब चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत विन्दु से ब की ओर है।

और कब, चाप (चा॑) की गणना वक्र के किसी नियत विन्दु से ब, की ओर है तो यदि अ विन्दु पर अब वक्र की जो स्पर्शरेखा अय है उसी को नियत स्पर्शरेखा मान अब का चापस्पार्शिक समीकरण बनावें और क विन्दु से इस पर जो कअ लम्ब डाला गया इस को नियत स्पर्शरेखा मान कर यदि कब, का चापस्पार्शिक समीकरण बनावें तो अवलूत और अनवलूत के लक्षण से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों में ब, का एक ही मान रहेगा।

इस लिये (१) क्षेत्र में $चा॑ = वि — स्थि = \frac{ताचा}{ताब_{,}} — स्थि$

और (२) क्षेत्र में $चा॑ = स्थि — वि = स्थि — \frac{ताचा}{ताब_{,}}$

इस लिये यदि चा का मान ब, के फलरूप में हो तो चा॑ का मान भी ब, के कोई फलरूप में जान सकते हैं जहाँ जब चा॑ = ० तब वक्रजातीय वृत्त का जो व्यासार्द्ध होगा वही स्थि का मान है।

जैसे चक्रालद में जानते हैं कि चा = ४अज्याष

इस लिये $चा॑ = स्थि — \frac{ताचा}{ताब_{,}} = स्थि — ४अकोज्याष$।

इस में यदि $ब_१ = ब'_१ + \frac{\pi}{२}$ और $चा' = ध + स्थि$ ऐसा कल्पना करें तो $ध = ४अ \cdot ज्याब'_१$ अर्थात् यह भी एक चक्रालद ही हुआ।

इसलिये चक्रालद का अवलूत एक चक्रालद ही है।

इसी प्रकार इस प्रक्रम की विपरीत क्रिया से यदि किसी वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अनवलूत का चापस्पार्शिक समीकरण जान सकते हैं। क्योंकि ऊपर के प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\frac{ताचा}{ताब_१} = स्थि \pm चा'$$

इसलिये $$चा = \int (स्थि \pm चा') \, ताब_१$$

इसलिये यदि $चा'$ का मान $ब_१$ के फल रूप में हो तो चा का मान भी $ब_१$ के कोई फल रूप में ला सकते हैं।

जैसे वृत्त में जानते हैं कि $चा' = अ \cdot ब_१$ इसलिये

$$चा = \int (स्थि \pm अ \cdot ब_१) ताब_१ = स्थि\, ब_१ \pm \frac{अ \cdot ब_१^२}{२} + स्थि_१$$

यदि चा की प्रवृत्ति वहाँ से हो जहाँ $ब_१ = ०$ तो $स्थि_१ = ०$। और अवलूत और अनवलूत के योग विन्दु ही से यदि चा की गणना करें तो स्थि = ० ऐसी स्थिति में

$चा = \frac{अ \cdot ब_१^२}{२}$। (चलनकलन के १७८ वें प्रक्रम का (५) उदाहरण देखो और फ के स्थान में $ब_१$ को मान लो)

ऊपर कहे हुए प्रक्रम की युक्ति से अवलूत का अवलूत उस का अवलूत यों अवलूतों की परम्परा वा अनवलूत का अनवलूत उसका अनवलूत यों अनवलूतों की परम्परा सहज में जान सकते हैं।

विद्यार्थियों को चाहिये कि चापस्पार्शिक समीकरण पर से वक्रों की आकृति निकाल अच्छी तरह अभ्यास करें। परन्तु चाहिये कि ऐसा वक्र लें जिस की आकृति चक्रालद के ऐसी प्रसिद्ध हो।

९७। चाप पर से विपरीत क्रिया से वक्र के भुज कोटि का ज्ञान।

कल्पना करो कि चा = फ(य) तो

$$\text{फ}'(\text{य}) = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{१ + \frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}}$$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\{\text{फ}'(\text{य})\}^२ - १}$

और $\text{र} = \int [\{\text{फ}'(\text{य})\}^२ - १]^{\frac{१}{२}} \text{ताय}$

जैसे (१) कल्पना करो कि $\text{चा} = \text{फ}(\text{य}) = \text{गय}$

इसलिये $\text{फ}'(\text{य}) = \text{ग}$

और $\text{र} = \int [\{\text{फ}'(\text{य})\}^२ - १]^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \int (\text{ग}^२ - १)^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \text{य}\sqrt{\text{ग}^२ - १} + \text{स्थि}$

यदि $\text{र}' = \text{र} - \text{स्थि}$ तो वक्र का समीकरण $\text{र}' = \text{य}\sqrt{\text{ग}^२ - १}$

(२) $\text{चा} = \text{फ}(\text{य}) = \sqrt{(४\text{गय})}$ तो $\text{फ}'(\text{य}) = (\frac{\text{ग}}{\text{य}})^{\frac{१}{२}}$

इस लिये $\text{र} = \int \{\frac{\text{ग}}{\text{य}} - १\}^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \int \frac{(\text{ग}-\text{य})\text{ताय}}{\sqrt{(\text{गय}-\text{य}^२)}} = \int \frac{(\frac{\text{ग}}{२}-\text{य})\text{ताय}}{\sqrt{(\text{गय}-\text{य}^२)}}$

$$+ \frac{\text{ग}}{२} \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(\text{गय}-\text{य}^२)}}$$

$$= \sqrt{(\text{गय} - \text{य}^२)} + \frac{\text{ग}}{२} \text{उज्या}^{-१} \frac{२\text{य}}{\text{ग}} + \text{स्थि}$$

यदि $\text{र}' = \text{र} - \text{स्थि}$ तो चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (११) वक्र, चक्रालद का समीकरण यह है ।

(३) $\text{चा} = \text{फ}(\text{य}) = \text{अ}\cdot\text{लाय}$ तो $\text{फ}'(\text{य}) = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$

यहाँ $\text{र} = \int \sqrt{\left[\frac{\text{अ}^२}{\text{य}^२} - १\right]} \text{ताय} = \int \frac{(\text{अ}^२ - \text{य}^२)\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{(\text{अ}^२ - \text{य}^२)}}$

$$= \int \frac{\text{अ}^२\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{(\text{अ}^२ - \text{य}^२)}} - \int \frac{\text{यताय}}{\sqrt{(\text{अ}^२ - \text{य}^२)}}$$

$$= \text{अ}\,\text{ला}\frac{\text{य}}{\text{अ} + \sqrt{(\text{अ}^२ - \text{य}^२)}} + \sqrt{(\text{अ}^२ - \text{य}^२)} + \text{स्थि}$$

इस तरह से अनेक उदाहरण का उत्तर निकाल सकते हो ।

इस तरह विद्यार्थियों को चाहिये कि पूर्व प्रक्रमों में लिखे हुए सिद्धान्तों का अच्छी तरह अभ्यास कर प्रश्न का उत्तर निकालें ।

९८। यदि आकाश में कोई वक्र हो जिस का समीकरण भुज, कोटि और शङ्कु से बनता हो अर्थात् तीन धरातलों के सम्बन्ध से समीकरण हो तो गोल-

युक्ति से यदि क्षितिज, पूर्वापर और याम्योत्तरवृत्त ये तीनों धरातलों को क्रम से मान लें और आकाशीय विन्दु को ग्रह कल्पना करें तो इस ग्रह का ज्ञान याम्योत्तरीय भुज = य, पूर्वापरीयकोटि = र और दृग्मण्डलीयशङ्कु = ल के ज्ञान से हो जायगा।

यदि किसी नियत विन्दु से ग्रह के गमन दिशा से जो वक्र हुआ उस के चाप का मान = चा मानें और जब भु = य + $\triangle$य, को = र + $\triangle$र और ल = ल + $\triangle$ल कल्पना करें और उस समय में चाप = चा + $\triangle$चा मानो तो गोलयुक्ति से $\triangle \text{चा} = \sqrt{(\triangle \text{य})^2 + (\triangle \text{र})^2 + (\triangle \text{ल})^2}$

$\triangle$य का भाग देकर $\triangle$य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{१ + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2}$$ ऐसा होगा।

इसी प्रकार

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}$$

और $$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताल}} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताल}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}\right)^2\right\}}$$

यहाँ वक्र के समीकरणों पर से $\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}$, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताल}}$, इत्यादि, य वा र अथवा ल के फल रूप में आ सकते हैं फिर इन पर से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}\,\text{ताय}$$

वा $$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}\,\text{तार}$$

अथवा $$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताल}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}\right)^2\right\}}\,\text{ताल}$$

इन का ज्ञान हो जायगा।

इस प्रकार के वक्र को द्विगुण वक्रजातीय वक्र (Curves of double Curvature) कहते हैं

जैसे कल्पना करो कि एक वक्र नीचे लिखे दो समीकरणों से ज्ञात है।

$$\text{र}^2 = ४\text{अय} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (१)$$

$$\text{ल} = \sqrt{(२\text{गय} — \text{य}^2)} + \text{गउज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{ग}} \quad \dots\dots \quad (२)$$

यहाँ दो समीकरणों से वक्र ज्ञात है इस का तात्पर्य ऐसा समझो।

कल्पना करो कि उदयास्तसूत्र और याम्योत्तर का सम्पात अ है तो अ बिन्दु को मूलबिन्दु, याम्योत्तर सूत्र को य अक्ष और उदयास्त सूत्र को र अक्ष कल्पना करने से (१)समीकरण का परवलय जो क्षितिज के धरातल में उत्पन्न होगा उसको आधार मान उस पर एक समखात ऐसा बनाओ जिस का पृष्ठसूत्र सब ऊर्ध्वाधरसूत्र के समानान्तर हो। इसी तरह अ को मूल मान और याम्योत्तर सूत्र को, य अक्ष, ऊर्ध्वाधर सूत्र को र अक्ष के ऐसा ल अक्ष मान याम्योत्तरवृत्त के धरातल में जो (२) समीकरण से चक्रालद बनेगा इस को आधार मान एक समखात बनाओ जिस का सब पृष्ठ-सूत्र उदयास्त-सूत्र के समानान्तर हो तो ऐसे दो समखातों के आपस में कटने से जो वक्र की आकृति होगी वही वक्र ऊपर के दोनों समीकरणों से अपेक्षित है।

$$\text{इस लिये यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{य}}},\ \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left(\frac{\text{२ग}-\text{य}}{\text{ग}}\right)}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ १ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ \right\}} = \sqrt{\left(१ + \frac{\text{अ}}{\text{य}} + \frac{\text{२ग}}{\text{य}} - १\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{२ग}+\text{अ}}{\text{य}}\right)}$$

$$\text{इसलिये चा} = \int \sqrt{\left(\frac{\text{२ग}+\text{अ}}{\text{य}}\right)}\,\text{ताय} = \sqrt{\text{२ग}+\text{अ}} \int \text{ताय}\ \text{य}^{-\frac{१}{२}}$$

$$= २\sqrt{(\text{२ग}+\text{अ})}\sqrt{\text{य}}$$

यदि मूल विन्दु से चाप की गणना करें तो स्थिराङ्क की कुछ आवश्यकता नहीं।

९९। इसी तरह यदि य, र, और ल किसी "का" चल के फल हों तो चलन-कलन की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताका}} = \sqrt{\left\{\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right]^२\right\}}$$

$$\text{इस लिये चा} = \sqrt{\left\{\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^२ + \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right]^२\right\}}\,\text{ताका}$$

जैसे यदि य = अकोज्याका, र = अज्याका, ल = ग का

$$\text{तो } \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} = -\text{अज्याका},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताका}} = \text{अकोज्याका},\ \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}} = \text{ग}$$

$$\text{इस लिये चा} = \int \sqrt{(\text{अ}^२\text{ज्या}^२\text{का} + \text{अ}^२\text{कोज्या}^२\text{का} + \text{ग}^२)}\,\text{ताका}$$

$$= \int (\text{अ}^2 + \text{ग}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताका} = \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{ग}^2)}\text{का} + \text{स्थि} \text{ ।}$$

१००। यदि $\text{य} = \text{श्रुज्यापकोज्याप}_1$, $\text{र} = \text{श्रुज्यापज्याप}_1$, $\text{ल} = \text{श्रुकोज्याप}$ ऐसा अक्षीय समीकरण हो, तो जब वक्र दो समीकरण से विदित है अर्थात् य, र, ल में से कोई दो तीसरे के फल हैं तब स्पष्ट है कि श्रु, प, प_1 इन में भी कोई दो तीसरे के फल होंगे। इस लिये प के वश से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = \text{ज्यापकोज्याप}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्यापकोज्याप}_1 - \text{श्रुज्यापज्याप}_1 \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{ज्यापज्याप}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्यापज्याप}_1 + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_1 \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{कोज्याप} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप}$$

इस लिये $\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\right]^2 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}\right]^2 + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\right]^2$

$$= \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \left[\frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2$$

और $\text{चा} = \int \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \left[\frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2 \right\}} \text{ ताप}$

इसी तरह र, और प_1 के वश से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^2 \left[\frac{\text{ताप}}{\text{तार}}\right]^2 + 1 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \left[\frac{\text{ताप}_1}{\text{तार}}\right]^2 \right\}} \text{ ताश्रु}$$

$$\text{वा, चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^2 \left[\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}_1}\right]^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\right]^2 \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \right\}} \text{ ताप}_1$$

१०१। इसी तरह अन्तरिक्ष में जो वक्र हो उस के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर मूलविन्दु से पड़ा लम्ब यदि ल कहो तो ७५ प्रक्रम के (६) समीकरण से $\text{चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}}$ ऐसा होगा।

यह समीकरण यद्यपि एकधरातलगत वक्र में सिद्ध होता है तथापि जब दो एकधरातलीय वक्रों के योग ही से यह वक्र उत्पन्न हुआ है तब योगविन्दु में इस में भी यही धर्म रहेगा। अथवा जब चलनकलन से सिद्ध है कि

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}, \frac{\text{श्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}}$ यह दोनों अन्तरिक्षस्थ वक्र के स्पर्शरेखा और श्रुति से

उत्पन्न कोण की छेदन रेखा है तब $\frac{ताचा}{ताश्रु}$

$$= \frac{श्रु}{\sqrt{(श्रु^२ — ल^२)}} \therefore चा = \int \frac{श्रु ताश्रु}{\sqrt{(श्रु^२ — ल^२)}} ।$$

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। यदि वक्र का समीकरण $४(य^२ + र^२) — अ^२ = ३अ^{\frac{४}{३}} र^{\frac{२}{३}}$ यह हो तो इस के परिधि का मान बताओ। परि॰ = ६अ।

२। सिद्ध करो कि त्रीतर का चा = $\pm$ गलार + स्थि।

३। सिद्ध करो कि किसी त्रिचक्रछेद (Trochoid) का चाप

$$= स्थि — \int \sqrt{\left\{ (ग — क)^२ ज्या^२ \frac{अं}{२} + (ग + क)^२ कोज्या^२ \frac{अं}{२} \right\}} ताअं$$

जहाँ अं = π — अ

चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१२) वक्र देखो

४। किसी वक्र में यदि य = ज्याप (२प + ३प^२) + कोज्याप (२ + ६प)

र = कोज्याप (२प + ३प^२) — ज्याप (२ + ६प)

तो सिद्ध करो कि चा = प^३ + प^२ + ६प + २।

५। सिद्ध करो कि किसी वक्र में यदि

य = ज्यापफ$^{।}$(प) + कोज्यापफ$^{।।}$(प)

र = कोज्यापफ$^{।}$(प) — ज्यापफ$^{।।}$(प)

तो चा = फ$^{।}$(प) + फ$^{।।}$(प)।

६। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण र = य^२ + $\frac{२}{३}$ य^३ हो तो यदि मूलविन्दु से चाप की गणना करें तो चा = य (य^२ + १)$^{\frac{३}{२}}$।

७। र^२ = अय^३ इस समीकरण के वक्र का चापस्पार्शिकसमीकरण कैसा होगा।

उ॰ चा = $\frac{८अ}{२७}$(छे^{३}व$_१$ — १)।

८। सिद्ध करो कि परवलय के चापस्पार्शिकसमीकरण में

$$\frac{ताचा}{ताब_१} = \frac{२अ}{कोज्या^३ब_१} । वा, चा = \frac{अ}{२} ला \frac{१ + ज्याब_१}{१ — ज्याब_१} + \frac{अज्याब_१}{१ — ज्या^२ब_१} ।$$

९। सिद्ध करो कि यदि वक्र का (य + र)$^{\frac{२}{३}}$ — (य — र)$^{\frac{२}{३}}$ = अ$^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण हो तो

$$चा = \frac{१}{\sqrt{२}} \left\{ (य+र)^{\frac{२}{३}} + (य-र)^{\frac{२}{३}} \right\}^{\frac{३}{२}} ।$$

१०। सिद्ध करो कि अपचक्राकलद का अवलूत एक अपचक्राकलद ही होगा जिस के स्थिरवृत्त का व्यासार्द्ध $= \frac{अ}{अ+२क}$ और चलितवृत्त का व्यासार्द्ध $= \frac{अ.क}{अ+२क}$ होगा ।

११। $श्रु^म = अ^म कोज्याम प$ इस समीकरण के वक्र में यदि $\frac{१}{म}$ यह कोई अभिन्नसंख्या हो तो चाप का मान जान सकते हैं ।

१२। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $इ^र = \frac{इ^य+१}{इ^य-१}$ ऐसा हो तो $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{इ^{य}+१}{इ^{२य}-१}$ होगा ।

१३। यदि वृत्त का व्यासार्द्ध = १ इस के चाप का प्रमाण = प हो और इसके अनवलूत का चाप = $प_१$, अनवलूत के अनवलूत का चाप = $प_२$, इस के अनवलूत का चाप = $प_३$ इस तरह अनवलूतपरम्पराओं के चाप मान $प_४$, $प_५$ इत्यादि मानो तो सिद्ध करो कि

$प + प_१ + प_२ + प_३ + \cdots = इ^प - १$ होगा ।

अनवलूत और वृत्त के योग विन्दु से चाप की गणना समझो ।

१४। यदि किसी इलामूलक (The Lamniscate) का $श्रु^२ = अ^२ कोज्या २प$ ऐसा समीकरण हो (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१०) वक्र देखो)

तो सिद्ध करो कि उस के परिधि का मान

$$= २\pi अ \left(१ - \frac{१}{२^२} + \frac{१^२ \cdot ३^२}{२^२ \cdot ४^२} - \frac{१^२ \cdot ३^२ \cdot ५^२}{२^२ \cdot ४^२ \cdot ६^२} + \cdots \right)$$ यह होगा ।

१५। यदि एक विन्दु से दीर्घवृत्त पर दो स्पर्शरेखा खींची जायँ तो दो स्पर्शरेखा दो भुज और उन के अन्तर्गत दीर्घवृत्त का चाप आधार मानो तो दो सरल और एक वक्ररेखा इस से एक त्रिवाहु उत्पन्न हुआ इस त्रिवाहु के अन्तर्गत जो वृत्त वनेगा वह वक्राधार को जहाँ स्पर्श करेगा उस से जो दो भाग वक्राधार के होंगे उन का अन्तर त्रिभुज के दोनों भुजों के अन्तर तुल्य होता है। इसे सिद्ध करो ।

१६। जिस वक्र का $र = \frac{य^2}{२अ}$, $ल = \frac{य^3}{६अ^2}$ ये समीकरण हैं उस के मूल विन्दु से चाप का मान बतावो। उ०, चा = य + ल ।

१७। सिद्ध करो कि यदि वक्र के समीकरण पर से $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 = २\frac{ताल}{ताय}$ तो चा = य + ल + स्थि ।

१८। वक्र का एक समीकरण र = फ(य) यह दिया हुआ है और यह जानते हैं कि इस के चाप का मान य + ल + स्थि यह है तो वक्र का दूसरा समीकरण क्या होगा। उ०, $ल = \frac{1}{२}\int \{फ(य)\}^2 ताय$ ।

१९। वक्र का एक समीकरण र = ज्याय यह है और इस के चाप का मान = य + ल तो दूसरे समीकरण का मान बताओ।

उ० $ल = \frac{अ}{२}\left(य + \frac{ज्या२य}{२}\right)$

२०। किसी वक्र में $र = २\sqrt{अय - य}$, $ल = य - \frac{२}{३}\sqrt{\frac{य^3}{अ}}$ तो चाप का क्या मान होगा। उ० चा = य + र — ल

२१। यदि वक्र के $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} = १$, $य = \frac{अ}{२}\left[इ^{\frac{ल}{अ}} + इ^{-\frac{ल}{अ}}\right]$ ये समीकरण हों तो चाप का क्या प्रमाण होगा।

उ०, य, र अक्ष के धरातल में जहाँ पर वक्र मिला है इस विन्दु से यदि चाप की गणना करें तो $चा = \frac{(अ^2 + क^2)^{\frac{1}{2}}}{अ}(य^2 - अ^2)^{\frac{1}{2}}$

२२। ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में त विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर न से पड़े लम्ब का मान यदि नल′ रक्खो तो सिद्ध करो कि

(१) नल × नल′ = नअ × नक । (२) $नव^2 + नल'^2 = नअ^2 + नक^2$ ।

२३। एक दीर्घवृत्त के परिधि चतुर्थांश का ऐसा द्विभाग करो कि उनका अन्तर व्यासार्द्धान्तर तुल्य हो।

८५ प्रक्रम का (१) क्षेत्र देखो यहाँ त और व दोनों एक ही स्थान में हो जायंगे। और $नल = \sqrt{नअ \times नक}$ और वल = नअ − नक

२४। २३ वें प्रश्न में द्विभागकारी विन्दु जो है उस पर दीर्घवृत्त में जो स्पर्शरेखा होगी वह दोनों अक्षों में द्विभागकारी विन्दु से क्रम से व्यासार्द्ध तुल्य अन्तर पर लगेगी अर्थात् र अक्ष में बृहद्व्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर और य अक्ष में लघुव्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर। इस को सिद्ध करो।

२५। यदि ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में (२२) प्रश्न के अनुसार लम्ब नल डालें तो सिद्ध करो कि बल, तल बढ़ाने से जिस विन्दु पर कटेंगे वह विन्दु दीर्घवृत्त के उस ऐकनाभिक अतिपरवलय में होगी जो कि (२३) प्रश्न में द्विभागकारी जो विन्दु है उस पर जायगा। यहाँ पर यह भी सिद्ध करो कि अ और क विन्दुगत स्पर्शरेखाओं के योग विन्दु पर भी वह अतिपरवलय जायगा।

२६। एक ही स्थान से तीन लड़के दौड़े पहला सरल मार्ग में और बाकी दो वक्रमार्ग में। पहला जिस स्थान पर पहुँचता था वहाँ पर यदि उस की गमन दिशा पर लम्ब करें तो यह लम्ब दूसरे और तीसरे के तात्कालिक स्थान पर जाता है। यदि पहला १० कोश चल कर ठहर जाय तो उस समय दूसरा और तीसरा कितना कितना चल चुके होंगे। इस प्रश्न में हम इतना जानते हैं कि किसी समय में पहले से दूसरे के स्थान का अन्तर = $\sqrt{४अय}$, और पहले से तीसरे के स्थान का अन्तर = $अय^{\frac{३}{२}}$।

यहाँ किसी समय में पहले के चल चुकने का प्रमाण य है

$$\text{उ० दूसरे का चलना} = \sqrt{१०० + १०अ} + \frac{अ}{२}\text{ला}\left\{\frac{२० + अ + २\sqrt{१०० + १० अ}}{अ}\right\}$$

$$\text{तीसरे का चलना} = अ\left\{\left[\frac{४}{९अ^{२}} + १०\right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^{३}}\right\}$$

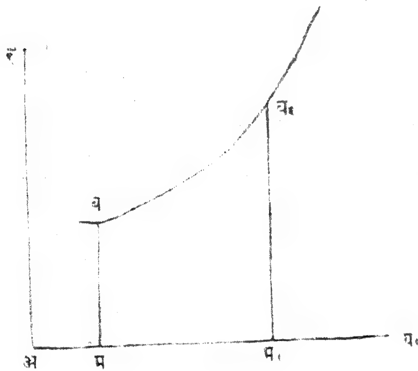
इति षष्ठाध्याय।

अथ सप्तमाध्याय।

वक्र क्षेत्रों का फलानयन।

१०२। जिस वक्र में कोटि, भुज का कोई फल है वहाँ चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}} = \text{र}$ (चलनकलन का १५६ वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये फ $= \int$ रताय इस में कोटि के स्थान में र_1 और र_2 का उत्थापन देकर सान्त चलानयन से



वम म₁व₁ वक्रचतुर्भुज का फल $\int_{\text{र}_1}^{\text{र}_2}$ रताय यह होगा।

यहाँ यदि अक्ष तिर्यक् हो तो यही फल ज्याअ $\int_{\text{र}_1}^{\text{र}_2}$ रताय ऐसा होगा। यहाँ अ $= \angle$ रअय।

१०३। इस की व्याप्ति के लिये कुछ वक्रों का फलानयन करते हैं।

केन्द्र को मूल मान वृत्त का $\text{र} = \sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}$ यह समीकरण है इस के फल का मान जानना है।

यहां १०२ प्रक्रम से फ $= \int \sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}$ ताय

$= \frac{\text{य}\sqrt{(\text{अ}^2 - \text{य}^2)}}{२} + \frac{\text{अ}^2}{२}$ ज्या$^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$ + स्थि, यदि प्रथम र को र अक्ष में मिला समझें तो उस समय य = ० होगा और फल भी शून्य इसलिये स्थि = ० तब फल

$$\int \sqrt{(\text{अ}^2 - \text{य}^2)}\text{ताय} = \frac{\text{य}\sqrt{(\text{अ}^2 - \text{य}^2)}}{२} + \frac{\text{अ}^2}{२}\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}।$$

इस में यदि य = अ तो वृत्तके चतुर्थांश का फल $= \frac{\text{अ}^2}{२} \times \frac{\pi}{२}$

इस लिये समग्रवृत्तफल = अ × अ$^{\text{ग}}$ = अ^{2}ग = $\frac{\text{२अ} \times \text{२अग}}{४} = \frac{\text{२अ} \times \text{परि}}{४}$

अर्थात् परिधि, व्यास के घात की चौथाई वृत्त का फल होता है। इस को भास्कराचार्य भी जानते थे इन से भी प्राचीन ब्रह्मगुप्तादिकों ने भी यह जान लिया था। परन्तु इस की उपपत्ति वे लोग नहीं दिखाये।

१०४। दीर्घवृत्त के फल का आनयन।

यहाँ $\text{र}^{2} = \frac{\text{क}^{2}}{\text{अ}^{2}}(\text{अ}^{2}-\text{य}^{2})$ इस लिये

फ = $\frac{\text{क}}{\text{अ}}\int\sqrt{(\text{अ}^{2}-\text{य}^{2})}\text{ताय}$। परन्तु १०३ प्रक्रम से $\int\sqrt{(\text{अ}^{2}-\text{य}^{2})}\text{ताय}$ यह अ, व्यासार्द्ध से उत्पन्न वृत्त का फल है इस लिये उस वृत्त का सम्पूर्ण फल जो हो उसे लघुव्यासार्द्ध से गुण कर बृहद्व्यासार्द्ध का भाग देने से दीघवृत्त का क्षेत्र फल होता है।

१०५। परवलय के फल का आनयन।

यहाँ $\text{र}^{2} = \text{४अय}$। इस लिये

फल = $\int\sqrt{(\text{४अय})}\text{ताय} = \frac{४\sqrt{\text{अ}}}{३}\text{य}^{\frac{३}{२}} + \text{स्थि}$।

यहाँ यदि य = ० तो फ = ० इस लिये स्थि = ०।

तब फ = $\frac{४\sqrt{\text{अ}}}{३} \times \text{य}^{\frac{१}{२}} \times \text{य} = \frac{\text{२यर}}{३}$ अर्थात् भुज और कोटि से जो आयत बने उस का दो तृतीयांश परवलय का फल होता है।

१०६। जिस वक्र का र = अय$^{\text{न}}$ ऐसा समीकरण है उस के फल का आनयन।

यहाँ फ = $\int\text{अय}^{\text{न}}\text{ताय} = \text{अ}\int\text{य}^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{अ}\cdot\text{य}^{\text{न}+१}}{\text{न}+१} + \text{स्थि}$।

यदि मूल स्थान से फल की प्रवृत्ति मानें तो स्थि = ० इस लिये

फ = $\frac{\text{अ}\cdot\text{य}^{\text{न}+१}}{\text{न}+१} = \frac{\text{अय}^{\text{न}} \times \text{य}}{\text{न}+१} = \frac{\text{र} \times \text{य}}{\text{न}+१}$ यह फल जानने के लिये ऐसे वक्र में एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हो गया। इस में न के स्थान में यदि $\frac{१}{२}$ का उत्थापन दो तो परवलय का फल आ जायगा।

१०७। अतिपरवलय के फल का आनयन।

केन्द्र को मूल मानने से इस का समीकरण $र = \frac{क}{अ}\sqrt{(य^2 — अ^2)}$

इस लिये $फ = \frac{क}{अ}\int\sqrt{(य^2 — अ^2)}\ ताय$

$$= \frac{क}{अ}\left\{\frac{य\sqrt{(य^2 — अ^2)}}{२} - \frac{अ^2}{२}\ ला\ (य + \sqrt{(य^2 — अ^2)})\right\} + स्थि$$

यदि य = अ तो फ = ० इस लिये

$$० = \frac{क}{अ}\left\{-\frac{अ^2}{२}\ लाअ\right\} + स्थि \therefore स्थि = \frac{कअ^2}{२अ}\ लाअ$$

इस लिये

$$फ = \frac{क}{अ}\left\{\frac{य\sqrt{य^2 — अ^2}}{२} - \frac{अ^2}{२}\ ला\left[\frac{य + \sqrt{य^2 — अ^2}}{अ}\right]\right\}$$

$$= \frac{यर}{२} - \frac{अक}{२}\ ला\left[\frac{य}{अ} + \frac{र}{क}\right]$$

केन्द्र से वक्र के प विन्दु तक एक रेखा कर दो तो भुज, कोटि, श्रुति से जो जात्यत्रिभुज होगा उस का फल $\frac{यर}{२}$ यह होगा। इस लिये श्रुति, अतिपरवलय का चाप और केन्द्र और शिरःस्थान का अन्तर अ से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल $= \frac{अक}{२}ला\left(\frac{य}{अ} + \frac{र}{क}\right)$ . . . . (१)

(चलनकलन का १११ वाँ प्रक्रम देखो)

१०८। चक्रालद के फल का आनयन।

चक्रालद में $य = अ\ (१ — कोज्याप)$ । $र = अ\ (प + ज्याप)$ ।

इस लिये $ताय = अज्याप \cdot ताप$ ।

और $रताय = अ^2(ज्या^2प + पज्याप)\ ताप$

$$= अ^2पज्यापताप + \frac{अ^2}{२}(१ — कोज्या२प)ताप$$

$$इसलिये \int रताय = अ^2\int पज्यापताप + \frac{अ^2}{२}\int(१ — कोज्या२प)ताप$$

$$= अ^2(— पकोज्याप + ज्याप) + \frac{अ^2}{२}\left(प — \frac{ज्या२प}{२}\right)$$

यदि ० और π के बीच प के मान में फल साधन करें तो चक्रालद

के आधे का फल $= अ^२ \pi + \frac{अ^२\pi}{२} = \frac{३अ^२\pi}{२}$ = चलितवृत्त के फल का डेढ़गुना इस लिये चलितवृत्त के फल को तीन गुना करने से सम्पूर्ण चक्रालद का फल होता है (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (११) वां वक्र देखो और वहाँ क = अ, और अ = ष मान लो)

इसी वक्र में यदि र = अष तो पूर्वयुक्ति से $\int रताय = अ^२ \int षज्यापताप$

$= अ^२(—षकोज्याष + ज्याष)$ यह चक्रालद के सार्थी का फलसमीकरण हुआ। इस में ष के ० और π के बीच यदि फल साधन करें तो आधे वक्र का फल $= अ^२ \pi$। इस लिये चलितवृत्त का दूना इस का फल होगा।

१०९। कातन्वली के फल का आनयन।

यहाँ $र = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}} \right)$

इस लिये $फ = \int रताय = \frac{ग}{२} \int \left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}} \right) ताय = \frac{ग^२}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} — इ^{-\frac{य}{ग}} \right)$

$$= ग \left\{ \frac{ग^२}{४} \left(इ^{२\frac{य}{ग}} - २ + इ^{-\frac{२य}{ग}}\right) \right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$= ग \left\{ \frac{ग^२}{४}\left(इ^{२\frac{य}{ग}} + २ + इ^{-\frac{२य}{ग}}\right) — ग^२ \right\}^{\frac{१}{२}} = ग\,(र^२ — ग^२)^{\frac{१}{२}}$$

११०। $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{२}{२म+१}} + \left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{२}{२न+१}} = १$ इस समीकरण के वक्र का फलानयन।

यहाँ यदि $य = अज्या^{२म+१}ष_१$ और $र = क कोज्या^{२न+१}ष_१$

तो $ताय = अ\,(२म + १)\, कोज्याष_१\, ज्या^{२म}ष_१\, ताष_१$

इस लिये $फ = \int रताय = अक(२म + १) \int कोज्या^{२न+२}ष_१ ज्या^{२म}ष_१ ताष_१$

३५ प्रक्रम के (१) समीकरण से इस का चल ला सकते हो।

वा खण्डचलानयन से

$$\int कोज्या^{२न+२}ष_१ ज्या^{२म}ष_१\, ताष_१$$

$$= \frac{कोज्या^{२न+१}ष_१ ज्या^{२म+१}ष_१}{२म + १} + \frac{२न + १}{२म + १} \int ज्या^{२म+२}ष_१ कोज्या^{२न}ष_१ ताष_१$$

$$= \frac{कोज्या^{२न+१}ष_१ ज्या^{२म+१}ष_१}{२म + १}$$

$$+\frac{\text{२न}+\text{१}}{\text{२म}+\text{१}}\int \text{ज्या}^{\text{२म}}\text{प}_{\text{१}}(\text{१}-\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{प}_{\text{१}})\text{कोज्या}^{\text{२न}}\text{प}_{\text{१}}\text{ताप}_{\text{१}}$$

$$=\frac{\text{कोज्या}^{\text{२न}+\text{१}}\text{प}_{\text{१}}\text{ज्या}^{\text{२म}+\text{१}}\text{प}_{\text{१}}}{\text{२म}+\text{१}}$$

$$+\frac{\text{२न}+\text{१}}{\text{२म}+\text{१}}\int \text{ज्या}^{\text{२म}}\text{प}_{\text{१}}\text{कोज्या}^{\text{२न}}\text{प}_{\text{१}}\text{ताप}_{\text{१}}$$

$$-\frac{\text{२न}+\text{१}}{\text{२म}+\text{१}}\int \text{ज्या}^{\text{२म}}\text{प}_{\text{१}}\text{कोज्या}^{\text{२न}+\text{२}}\text{प}_{\text{१}}\text{ताप}_{\text{१}}$$

पक्षान्तरानयन कर $\frac{\text{२म}+\text{२न}+\text{२}}{\text{२म}+\text{१}}$ का भाग दे देने से

$$\int \text{ज्या}^{\text{२म}}\text{प}_{\text{१}}\text{कोज्या}^{\text{२न}+\text{२}}\text{प}_{\text{१}}\text{ताप}_{\text{१}}$$

$$=\frac{\text{कोज्या}^{\text{२न}+\text{१}}\text{प}_{\text{१}}\text{ज्या}^{\text{२म}+\text{१}}\text{प}_{\text{१}}}{\text{२}(\text{म}+\text{न}+\text{१})}+\frac{\text{२न}+\text{१}}{(\text{२म}+\text{न}+\text{१})}\int \text{ज्या}^{\text{२म}}\text{प}_{\text{१}}\text{कोज्या}^{\text{२न}}\text{प}_{\text{१}}\text{ताप}_{\text{१}} \quad \cdots\cdots(\text{१})$$

यदि ० और $\frac{\pi}{2}$ के बीच $\text{प}_{\text{१}}$ के मान में सान्तचल का मान लावें तो सम्पूर्ण वक्र का फल (१) से स्पष्ट है कि

$$\frac{\text{१.३.५.७}\cdots\cdots(\text{२न}+\text{१})\cdot\text{१.३.५.७}\cdots\cdots(\text{२म}+\text{१})}{\text{२.४.६.८}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{२}(\text{म}+\text{न}+\text{१})}\,\text{२अक}\pi,$$ यही होगा।

न, म के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देकर अनेक वक्र और उनके क्षेत्रफल जान सकते हो ।

जैसे यदि वक्र का $\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\text{र}}{\text{क}}\right)^{\frac{2}{3}}=\text{१}$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ म = १ और न = १ इस लिये २न + १ = ३, और २म + १ = ३, २(म + न + १) = ६। फल में इन का उत्थापन देने से वक्र का संपूर्ण फल $=\frac{\text{१.३.१.३}}{\text{२.४.६}}$ अकπ = $\frac{3}{16}$२अक π = $\frac{3}{8}$ अक π

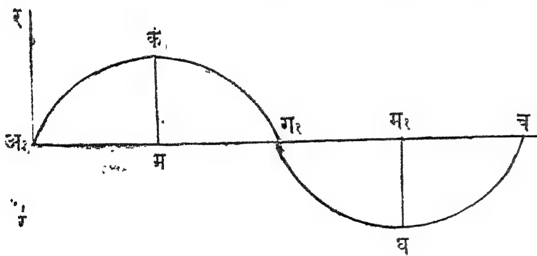
इस वक्र को चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि दीर्घवृत्त का अवलूत है ।

१११। कभी कभी दो सीमाओं के भीतर फलानयन में बड़ा धोखा पड़ जाता है। क्योंकि ऊपर के प्रक्रमों से जो फलानयन किया है किसी स्थान में र के धनत्व वा ऋणत्व का विचार नहीं किया है सर्वत्र र को एक ही प्रकार का मान लिया है। परन्तु फलानयन में र के स्थान में य के फल में जो उस का रूप होता है उस का उत्थापन देकर फल साधन किया है इस लिये संभव है कि इस फल

में ऋणात्मक र संबन्धी य का उत्थापन देने से वही मान आवे जो कि धनात्मक र में आता हो ऐसी दशा में अवश्य धोखा खाने की सम्भावना है।

जैसे यदि किसी वक्र का $र = गज्या \frac{य}{अ}$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ फल का समीकरण $\int रताय = ग \int ज्या \frac{य}{अ} ताय = -गअकोज्या \frac{य}{अ}$ मानो कि जब $य = य_1$ तो $र = र_1$ और जब $य = य_2$ तब $र = र_2$ इस लिये $र_1$ और $र_2$ कोटि मान के बीच में क्षेत्रफल $ग \int_{य_1}^{य_2} ज्या \frac{य}{अ} ताय$

$= ग अ \left[कोज्या \frac{य_1}{अ} - कोज्या \frac{य_2}{अ} \right]$ यह हुआ। इस में पहले मानो कि $य_1 = 0$, $य_2 = अ\pi$, तो फल = २गअ यह होगा। फिर मानो कि $य_1 = 0$, $य_2 = २अ\pi$ तो $गअ \left[कोज्या \frac{य_1}{अ} - कोज्या \frac{य_2}{अ} \right]$ इस का मान शून्य होगा जो कि क्षेत्र की आकृति से असम्भव है क्योंकि जब तक य, ० से $\frac{अ\pi}{२}$ के ऊपर आवेगा तब तक र का धनमान बढ़ता रहेगा फिर आगे धनमान घटने लगेगा जब $य = अ\pi$ तब शून्य हो जायगा इस लिये वक्र फिर य अक्ष में मिलेगा इस लिये $य_1 = 0$ और $य_1 = अ\pi$ के बीच का पहले जो फल २अग आया है वह एक ही चाल के र में सिद्ध हुआ ठीक आया। अब य का मान $अ\pi$ के आगे बढ़ेगा तब र का मान ऋण होगा और बराबर य के $२अ\pi$ मान तक ऋण ही ऋण चला जायगा ऐसी दशा में य अक्ष से नीचे वक्र बनेगा जैसा कि नीचे की आकृति से स्पष्ट है। यहाँ $अ_1ग_1 = अ\pi$ और $अ_1च = २अ\pi$



और $कम = ग = म_1घ$। और वक्र के धन कोटि मान में $अ_1कग_1$ खण्ड और ऋण कोटि मान में $ग_1घच$ खण्ड है। इस लिये ० और $२अ\pi$ के बीच य के मान में $अ_1कग_1घच$ का फल वक्र के समीकरण से $अ_1कग_1$ का अर्थात् २ग·अ का दूना ४गअ होगा परन्तु फल के समीकरण से शून्य आया इस लिये वह असम्भव है। ऐसी स्थिति

में चाहिये कि ग,घच के फल के लिये र का मान ऋण मानो तब इस का फल = $\int (-र) ताय = ग \int (-ज्या \frac{य}{अ}) ताय = अग कोज्या \frac{य}{अ} +$ स्थि

इस लिये सम्पूर्ण फल = $ग \int_{0}^{अ\pi} ज्या \frac{य}{अ} ताय + ग \int_{अ\pi}^{२अ\pi} (-ज्या \frac{य}{अ}) ताय$

$= २गअ + २गअ = ४गअ$ यह ठीक होगा ।

ऐसे ऐसे स्थानों में र के धनत्व वा ऋणत्व का बिना विचार किये फलानयन ठीक न होगा ।

११२। जब कहीं सीमितवक्र के फल साधन में $\int रताय$ के मान में य के स्थान में क्या क्या उत्थापन दें जिस में सम्पूर्ण वक्र का फल आ जाय इस में संशय जान पड़े तो $\int रताय$ स्थान में $\int र \frac{ताय}{ताचा} ताचा$ इस का उत्थापन देने से सुगमता हो जायगी इस में चा के स्थान में वक्र के परिधि का वा तत्सम्बन्धी और कोई चल का उत्थापन देने से सम्पूर्ण फल तुरन्त आ जायगा ।

जैसे दीर्घवृत्त में ७७ वें प्रक्रम से

$\frac{ताचा}{ताप} = अ\sqrt{(१-इ^२ ज्या^२ प}$ और $\frac{ताय}{ताष} =$ अकोज्याष इस लिये

$\frac{ताय}{ताचा} = \frac{कोज्याष}{\sqrt{१-इ^२ ज्या^२ ष}}$ और $र \cdot \frac{ताय}{ताचा} \cdot ताचा = कअकोज्या^२ ष ताष$

इस लिये $\int र \frac{ताय}{ताचा} ताचा = अक \int कोज्या^२ ष ताष$

$= \frac{अक}{२} (१ + कोज्या२प) ताप = \frac{अक}{२} (ष - \frac{ज्या२प}{२})$ अब सम्पूर्ण दीर्घवृत्त की परिधि में प, चार समकोण अर्थात् २π होगा इस लिये इस का उत्थापन देने से सम्पूर्ण दीर्घवृत्त का फल = $अक\pi = \frac{क}{अ} अ^२\pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

कहीं कहीं य को कोटि और र को भुज मान कर भी दो भुजों के बीच वक्रीय फल का साधन कर सकते हो ।

जैसे परवलय में $र^२ = ४अय \therefore \frac{र^२}{४अ} = य$ इस लिये

$\int$ यतार $= \frac{१}{४अ}\int$ र^{२}तार $= \frac{र^३}{१२अ} = \frac{र^२ \times र}{४अ \times ३} = \frac{य \times र}{३}$ यह फल वक्र के विन्दु से र अक्ष पर जो य के तुल्य लम्ब पड़ा उस से और लम्बमूल और वक्र के शिरःस्थान अ तक जो रेखा और वक्र के चाप से जो वक्रत्रिबाहु हुआ उस का है।

११३। २, और ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि दो कोटियों ($र_०$, $र_न$) के बीच वक्र का फल $= \int_{य_०}^{य_न}$ रताय $= र_०च_१ + र_१च_२ + \cdots + र_{न-१}च_न$

यही है। जहाँ र = फ(य), $र_०$ = फ($य_०$), $र_१$ = फ($य_१$) $\cdots$
$र_न$ = फ($य_न$) इस लिये ६३ प्रक्रम की युक्ति से श्रेढीरूप फल के पदों का मान र$\triangle$य इस साँचे से अथवा फ(य)$\triangle$य इस साँचे से प्रकाश कर सकते हैं।

यहाँ भी ठीक वैसा ही अर्थ समझना चाहिये और च का सूचक जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है$\triangle$य है।

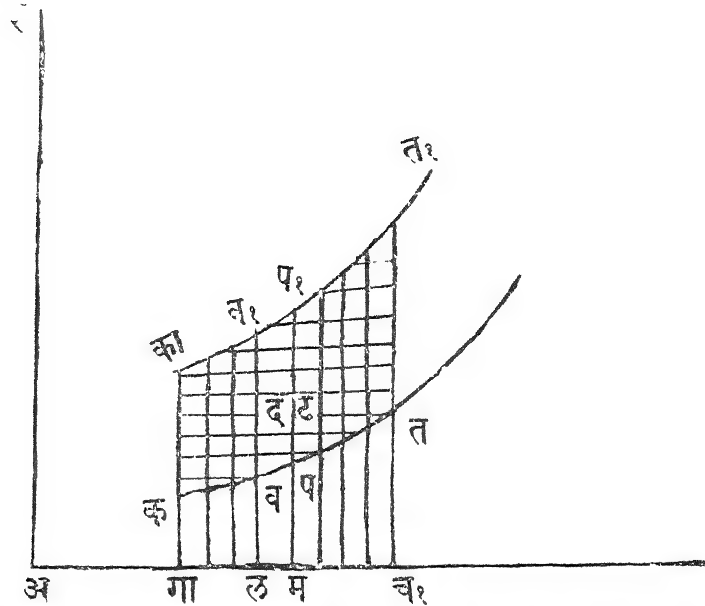
इस लिये दो कोटियोंके बीच वक्र का फल यौर$\triangle$य इस से प्रकाश कर सकते हैं र$\triangle$य के पहले जो यौ है उस से यह समझना चाहिये कि$\triangle$य के स्थान में $च_१$, $च_२$, $\cdots$ $च_न$ का और र के स्थान में $र_०$, $र_१$ $र_२$ $\cdots$ $र_{न-१}$ का उत्थापन देने से जितने पद होंगे उन सबों का योग किया हुआ है।

५ वें प्रक्रम से स्पष्ट जान पड़ेगा कि यदि $अअ_१$, $अ_१अ_२$ इत्यादि को (जो अत्यल्प मान है) $\triangle$य से प्रकाश करें और $क_२अ_१$,$क_१अ_२$ इत्यादि को र से, तो पास की दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर = $\triangle$य और वक्र चापान्तर से जो चतुर्भुज बनेगा उस का फल = र$\triangle$य यह होगा।

और र, के स्थान में $र_०$, $र_१$ इत्यादि का $\triangle$य के स्थान में $अअ_१$ $अ_१अ_२$ इत्यादि का उत्थापन देने से श्रेढी के प्रत्येक पद क्रम से प्रत्येक वक्रचतुर्भुज के फल होंगे।

वक्र क्षेत्र के फल ही से धीरे धीरे चलराशिकलन का प्रचार हुआ। क्षेत्र का छोटा छोटा खण्ड कर के पृथक् पृथक् खण्डों के फलों के योग से फल का ले आना भास्कर के गोलाध्याय के पृष्ठ फल देखने से जान पड़ता है कि भास्कर को समझ पड़ा था परन्तु इन से पहले भारतवर्ष में इस प्रकार से फल ले आने की कहीं भी चर्चा नहीं है।

११४। दो वक्रों के चाप और उन के कोट्यन्तर से जो क्षेत्र बनेगा उस का फलानयन ।



कल्पना करो कि काव१प१त१ एक वक्र का चाप और कवपत दूसरे वक्र का चाप, काक प्रथम कोट्यन्तर और त१त दूसरा कोट्यन्तर इन से काकतत१ वक्र क्षेत्र जो बना है उस का फल जानना है ।

र अक्ष के समानान्तर और य अक्ष के समानान्तर अनेक रेखा जिन में दो दो का अन्तर बहुत ही अल्प हो खींचने से देखो अनेक, क्षेत्र के भीतर आयत बन गये हैं जिन में किसी एक दट का फल (यदि अल = य, दल = र और अम = य + △य, मट = र + △र) △य△र यही होगा । अब, वव१प१प वक्रचतुर्भुज के बीच जितने छोटे छोटे दट के ऐसे चतुर्भुज हैं उन के फलों का योग यौ△य△र यही होगा । यहाँ क्षेत्र के देखने से स्पष्ट है कि △य सर्वत्र एक ही है इस लिये

$$\text{यौ}\triangle\text{य}\triangle\text{र} = \int_{\text{लव}}^{\text{लव}_1} \triangle\text{यतार} = \triangle\text{य} \int_{\text{लव}}^{\text{लव}_1} \text{तार}$$

इस में △र का मान अत्यल्प मानने से अर्थात् तार मानने से वव१ प१प वक्र चतुर्भुज के विलक्षण खण्ड हैं उन का लोप हो जायगा ।

$$\text{इस लिये वव}_1\text{प}_1\text{प} = \triangle\text{य} \int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}} \text{तार} = \triangle\text{य} \{ \text{फा(य)} - \text{फ(य)} \}$$

यहाँ $\text{फा}(\text{य}) = \text{व}_1\text{ल}$ = ऊपर के वक्र की कोटि और

$\text{फ}(\text{य}) = \text{वल}$ = नीचे के वक्र की कोटि ।

इस प्रकार सब स्तम्भरूप वक्रचतुर्भुजों का योग $\triangle \text{य} \{ \text{फा}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \}$ इस सांचे से निकाल सकते हो अर्थात् यदि $\text{अगा} = \text{गा}$, $\text{अच}_1 = \text{चा}$ तो

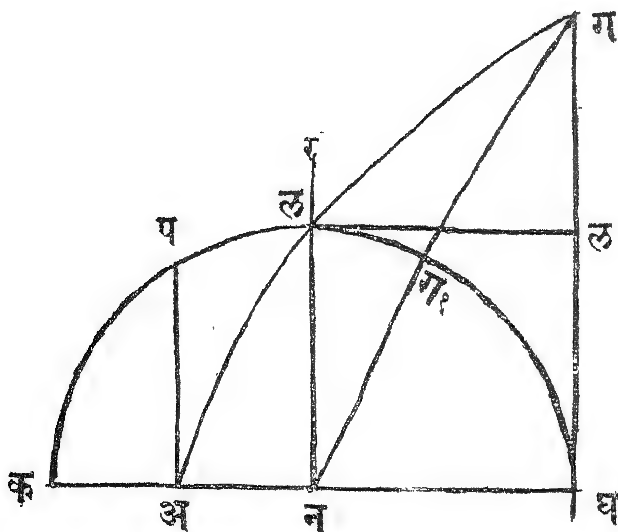
$$\text{कका}\ \text{त}_1\text{त} = \text{यौ}\triangle\text{य} \{ \text{फा}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \} = \int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \{ \text{फा}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \}\, \text{ताय}$$

यदि द्विगुणचलानयन की रीति से इस फल को लिखें तो इस का मान $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ}(\text{य})}^{\text{फा}(\text{य})} \text{तार ताय}$ ऐसा होगा ।

११५। यदि जिन दो वक्रों के $\text{य} = \text{फा}(\text{र})$ । $\text{य} = \text{फ}(\text{र})$ ऐसे समीकरण हों और उन से सीमितक्षेत्र का फल जानना हो तो स्पष्ट है कि ऊपर के मान में य र को वदल देना होगा । अर्थात् तब क्षेत्र का फल

$\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ}(\text{र})}^{\text{फा}(\text{र})} \text{ताय तार}$ ऐसा होगा ।

११६। ऊपर के दोनों प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं।



कल्पना करो कि कलघ वृत्त, और अलग परवलय में न मूलविन्दु, $\text{नल} = 2\text{अ}$ = वृत्त का व्यासार्द्ध, $\text{नअ} = \text{कअ} = \text{अ}$, तो यदि न विन्दु से घ की ओर भुज-

गणना करें तो वृत्त का समीकरण $र^२ = ४अ^२ — य^२$ और परवलय का समीकरण $र^२ = ४अ(अ + य)$ होगा। क्योंकि इस स्थिति में न परवलय की नाभी होगी।

अब यहाँ यह इच्छा है कि घल वृत्त का चाप, गल परवलय का चाप, गघ परवलय की कोटि इन से जो गघल वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल निकालें।

११४ वें प्रक्रम में जो ऐसे क्षेत्रों के लिये फल का $\int_{गा}^{चा} \int_{फ(य)}^{फा(य)}$ तार ताय यह समीकरण है इस में $फा(य) = \sqrt{४अ(अ + य)}$, $फ(य) = \sqrt{४अ^२ — य^२}$, $चा = नघ = २अ$, । और $गा = ०$ मानने से घलग का फल

$$= \int_{०}^{२अ} \{ फा(य) — फ(य) \} ताय$$

$$= \int_{०}^{२अ} \{ (४अ^२ + ४अय)^{\frac{१}{२}} — (४अ^२ — य^२)^{\frac{१}{२}} \} ताय$$

$$= \int_{०}^{२अ} (४अ^२ + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय — \int_{०}^{२अ} (४अ^२ — य^२)^{\frac{१}{२}} ताय$$

$$परन्तु = \int (४अ^२ + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{४}{३}\sqrt{अ}\,(अ + य)^{\frac{३}{२}}$$

$$और \int_{०}^{२अ} (४अ^२ + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{४}{३} अ^{\frac{१}{२}} (३अ)^{\frac{३}{२}} - \frac{४}{३} अ^{\frac{१}{२}} अ^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{४}{३} \{ (३)^{\frac{३}{२}} अ^२ — अ^२ \} = \frac{४अ^२}{३} (\sqrt{२७} — १)$$

$$और \int (४अ^२ — य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = २अ^२ ज्या^{-१} \frac{य}{२अ} + य\sqrt{(४अ^२ — य^२)}$$

$$इस लिये \int_{०}^{२अ} (४अ^२ — य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = अ^२ \pi$$

ऊपर फल मान में इन का उत्थापन देने से

$$फ = \int_{०}^{२अ} \{ (४अ^२ + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = (४अ^२ — य^२)^{\frac{१}{२}} \} ताय$$

$$= \frac{४अ^२}{३} (\sqrt{२७} — १) — अ^२ \pi \text{ ।}$$

यदि परवलय में भुज की गणना अ विन्दु से करें तो १०५ प्रक्रम से अलन परवलयखण्ड का फल $= \frac{अ \times २अ \times २}{३} = \frac{४अ^२}{३}$ और अगघ परवलयखण्ड

का फल $= \frac{२अघ \times गघ}{३} = \frac{२ \times ३अ(१२अ^२)^{\frac{१}{२}}}{३} = ४अ^२\sqrt{३}$ । इन दोनों का अन्तर नघगल वक्रचतुर्भुज का फल $= ४अ^२\sqrt{३} - \frac{४अ^२}{३} = \frac{४अ^२}{३}(\sqrt{२७} - १)$

इस में वृत्त के चतुर्थांश घनल को अर्थात् $अ^२\pi$ इस को घटा देने से गलघ वक्र क्षेत्र का फल $= \frac{४अ^२}{३}(\sqrt{२७} - १) - अ^२\pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

इसी जगह यदि अल परवलय का चाप, कल, वृत्त का चाप, और कअ भुजान्तर से जो क्षेत्र है इस का फल अपेक्षित हो तो क्षेत्र से स्पष्ट है कि न से यदि क की ओर भुजगणना करें और भुज ही को कोटि मान लें तो यहाँ वृत्त का समीकरण $र^२ = ४अ^२ - य^२$ यह जो है उस से $य^२ = ४अ^२ - र^२$ और परवलय का समीकरण $र^२ = ४अ(अ - य)$ जो यह होगा उस से $य = अ - \frac{र^२}{४अ}$

अब ११५वें प्रक्रम से $फा(र) = \sqrt{४अ^२ - र^२}$ । $फ(र) = अ - \frac{र^२}{४अ}$

$चा = २अ$, $गा = ०$ और क्षेत्र का फल $= \int_{गा}^{चा}\int_{फ(र)}^{फा(र)} ताय\, तार$

$$= \int_{०}^{२अ} \{ फा(र) - फ(र) \}\, तार = \int_{०}^{२अ} \{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - अ + \frac{र^२}{४अ} \}\, तार$$

परन्तु $\int \sqrt{४अ^२ - र^२}\, तार = २अ^२ ज्या^{-१}\frac{र}{२अ} + र\sqrt{(४अ^२ - र^२)}$

और $\int (अ + \frac{र^२}{४अ})\, तार = अर - \frac{र^३}{१२अ}$

इस लिये

$$\int_{०}^{२अ} \{ \sqrt{(४अ^२ - र^२)} - (अ - \frac{र^२}{४अ}) \}\, तार = अ^२ग - २अ^२ + \frac{२}{३}अ^२$$

$$= अ^२\pi - \frac{४}{३}अ^२ \text{ यही फल हुआ ।}$$

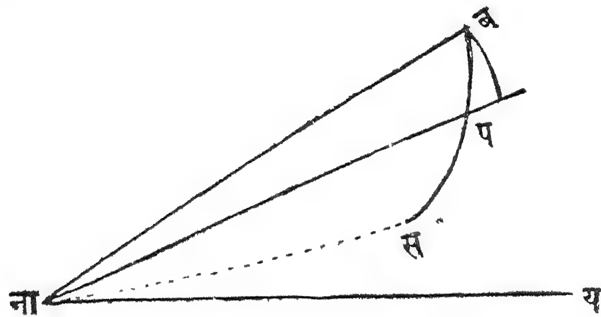
इसे परवलयखण्ड नअल और वृत्तचतुर्थांश नकल के अन्तर पर से भी निकाल सकते हो। इस तरह से जहाँ पर जिन सीमाओं के भीतर फल अपेक्षित

हो वहाँ पर क्षेत्र की आकृति से उन सीमाओं को अच्छी तरह से जाँच कर तब उन के उत्थापन से फल का साधन करो ।

जहाँ दोनों वक्रात्मक भुज एक ही वक्र के शाखा हों वहाँ पर ११४ और ११५ प्रक्रम की युक्ति बहुत ही काम की है जैसे किसी वक्र का यदि $(र—मय—ग)^{२} = अ^{२}—य^{२}$ यह समीकरण हो तो इस पर से र का एक मान $र = मय + ग + \sqrt{(अ^{२}—य^{२})}$ यह दूसरा $मय + ग—\sqrt{(अ^{२}—य^{२})}$ यह होगा ।

यहाँ $फा(य) = मय + ग + \sqrt{(अ^{२}—य^{२})}$ और $फ(य) = मय + ग—\sqrt{(अ^{२}—य^{२})}$ मान लें तो $फा(य) — फ(य) = २\sqrt{(अ^{२}—य^{२})}$ इस लिये वक्रशाखा और कोट्यन्तर से उत्पन्न फल $२\int_{गा}^{चा} \sqrt{(अ^{२}—य^{२})}ताय$ यह होगा । यहाँ य का परमाल्प मान—अ और परमाधिक २अ मान लें तो पहले वक्र का सम्पूर्ण फल = $२\int_{-अ}^{अ} \sqrt{(अ^{२}—य^{२})}ताय = \pi अ^{२}$ यही होगा ।

११७। अक्षीय भुजयुग्म पर से वक्र का फलानयन ।



सपब वक्र में मान लो कि ना ध्रुवस्थान नाय नियत रेखा नाप = श्रु । $\angle$ यनाप = प और श्रु = फ(प) । तो यदि नासप वक्रत्रिबाहु का फल = आ हो तो चलनकलन के १५८ वें प्रक्रम से

$$\frac{ताआ}{ताप} = \frac{श्रु^{२}}{२} = \frac{\{फ(प)\}^{२}}{२}$$

इस लिये $आ = \frac{१}{२}\int \{फ(प)\}^{२}ताप + स्थि$ । यहाँ वक्र में स विन्दु को कोई निश्चित विन्दु समझो ।

$$मानो कि \int \frac{\{फ(प)\}^{२}ताप}{२} = फा(प)$$

तो $\text{आ} = \text{फा}(\text{ष}) + \text{स्थि}$ · · · · · · · (१)

कल्पना करो कि जब $\text{ष} = \text{ष}_1$ तब $\text{आ} = \text{आ}_1$ और जब $\text{ष} = \text{ष}_2$ तब $\text{आ} = \text{आ}_2$ इस लिये (१) समीकरण से

$$\text{आ}_2 - \text{आ}_1 = \text{फा}(\text{ष}_2) - \text{फा}(\text{ष}_1) = \frac{1}{2}\int_{\text{ष}_2}^{\text{ष}_2} \{ \text{फ}(\text{ष}) \}^2 \text{ताष}$$

यदि श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान भ रक्खो और ध्रुवस्थान से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्ब का मान ल मानो तो त्रिकोणमिति से

$$\text{ज्याभ} = \frac{\text{लं}}{\text{श्रु}} = \text{श्रु}\,\frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}}$$ (चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से)

$$\text{इस लिये आ} = \frac{1}{2}\int \text{श्रु}^2 \text{ताष} = \frac{1}{2}\int \text{श्रु}^2 \frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}} \cdot \text{ताचा}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{श्रु}\cdot\text{ल}}{\text{श्रु}}\,\text{ताचा} = \frac{1}{2}\int \text{ल ताचा} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

यहाँ ल का मान चा के फल रूप में वा $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताल}}$ का मान ल के फल रूप में जानने से आ का मान चा वा ल के फल रूप में जान सकते हो।

$$\text{आ} = \frac{1}{2}\int \text{ल ताचा} = \frac{1}{2}\int \text{ल}\,\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}\,\text{ताश्रु} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{लश्रु ताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}} \quad \cdots (३)$$

७५ प्रक्रम के (६)वें समीकरण से।

ऊपर दिखलाये हुए तीनों समीकरण पर से अनेक वक्र का फल जान सकते हैं।

११८। सामास्रिक सर्पिल का फलानयन (जिस वक्र के समीकरण वा नाम इत्यादि में संशय पड़े तो चलनकलन का २८६ प्रक्रम देखना चाहिये)।

यहाँ $\text{श्रु} = \text{अ}\,\text{इ}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ इस लिये ११७ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\text{आ} = \frac{1}{2}\int \text{अ}^2 \text{इ}^{\frac{2\text{ष}}{\text{क}}} = \frac{\text{अ}^2\text{क}}{4}\text{इ}^{\frac{2\text{प}}{\text{क}}} + \text{स्थि}।$$

$$\text{और आ}_2 - \text{अ}_1 = \frac{\text{अ}^2\text{क}}{4}\left[\text{इ}^{\frac{2\text{प}_2}{\text{क}}} - \text{इ}^{\frac{2\text{प}_1}{\text{क}}}\right] = \frac{\text{क}}{4}(\text{श्रु}_2^2 - \text{श्रु}_1^2)$$

इस लिये श्रु_2, श्रु_1 ये दो भुज और तदन्तर्गत वक्र का चाप इन से जो क्षेत्र होगा उस का फल $\frac{\text{क}}{4}(\text{श्रु}_2^2 - \text{श्रु}_1^2)$ यही होगा।

११९। अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन।

चलनकलन के १०८ प्रक्रम से।

यहाँ $श्र = \frac{अ}{कोज्या^{२} \frac{प}{२}}$ इस लिये

$$आ = \frac{अ^{२}}{२} \int \frac{ताप}{कोज्या^{४} \frac{१}{२}प} = अ^{२} \int (१ + स्प^{२} \tfrac{१}{२}प)\ तास्प\ \tfrac{१}{२}प$$

$$= अ^{२}(स्प\tfrac{१}{२}प + \frac{स्प^{३} \frac{१}{२}प}{३}) + स्थि।$$

इस लिये $आ_{२} - आ_{१} = अ^{२}(स्प\tfrac{१}{२}प_{२} + \frac{स्प^{३}\frac{१}{२}प}{३}) - अ^{२}(स्प\tfrac{१}{२}प_{१} - \tfrac{१}{३}स्प^{३}\tfrac{१}{२}प_{१})$

इस में यदि $प_{१} = ०$ और $प_{२} = \frac{\pi}{२}$ तो

$आ_{२} - आ_{१} = अ^{२}(१ + \tfrac{१}{३}) = \tfrac{४}{३}अ^{२} = \tfrac{२}{३} \frac{अ \times २अ}{१}$ अर्थात् परवलय के नाभिग कोटि, तत्सम्बन्धि शिरःस्थान से भुज और परवलय का चाप इन से बने क्षेत्र का फल $\tfrac{२}{३}$ अ × २अ यह वही सिद्ध हुआ जो १०५ वें प्रक्रम से सिद्ध होता है।

१२०। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण श्रु = अ(प + ज्याष) यह है उस का फलानयन।

$$यहाँ\ आ = \tfrac{१}{२}अ^{२} \int (प + ज्याप)^{२}ताप = \frac{अ^{२}}{२} \int (प^{२} + २प\ ज्याष + ज्या^{२}ष)ताष$$

$$परन्तु \int प\ ज्याप = -पकोज्याप + ज्याष।$$

$$और \int ज्या^{२}प\ ताप = \tfrac{१}{२} \int (१ - कोज्या२ष)\ ताष = \tfrac{१}{२}(प - \frac{ज्या२ष}{२})$$

इस लिये

$$आ = \frac{अ^{२}}{२} \left\{ \frac{प^{३}}{३} - २षकोज्याप + २ज्याप + \tfrac{प}{२} - \tfrac{१}{४}ज्या२ष \right\} + स्थि$$

यहाँ यदि ० और $\frac{\pi}{२}$ के बीच प के मान में फल लावें तो

$$फल = \frac{अ^{२}}{२}(\tfrac{\pi^{३}}{२४} + \tfrac{\pi}{४} + २)।$$

१२१। यदि वक्र का अक्षीय समीकरण $श्रु = २\ अ\frac{कोज्याष - \sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^{२}ष}$ ऐसा हो तो

$$आ = २\ अ^{२} \int \frac{कोज्या^{२}ष + को\ ज्या२ष - २\ को\ ज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^{४}ष}\ ताष$$

$$= २ अ^२ \int \frac{कोज्या^२ष + कोज्या२ष}{ज्या^४ष} ताष - ४अ^२ \int \frac{कोज्याष\sqrt{कोज्या२ष)}}{ज्या^४ष} ताष$$

$$परन्तु \int \frac{कोज्या^२ष + कोज्या२ष}{ज्या^४ष} ताष = \int (२कोस्प^२ष — १) कोछे^२षताष$$

$$= कोस्पष — \frac{२}{३} कोस्प^३ष ।$$

$$और \int \frac{कोज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^४ष} ताष = \int \frac{\sqrt{(१— २ ज्या^२ष)}\ ताज्याष}{ज्या^४ष}$$

इस में मानो कि ज्याष $= \frac{१}{द}$ तो

$$\int \frac{\sqrt{(१ — २ ज्या^२ष)}}{ज्या^४ष} ताष = — \int \sqrt{(द^२ — २)} दताद$$

$$= —\frac{१}{३} (द^२—२)^{\frac{३}{२}} = — \frac{१}{३} (\frac{१}{ज्या^२ष} —२)^{\frac{३}{२}}$$

$= — \frac{१}{३} (कोछे^२ष-२)^{\frac{३}{२}}$ इन का उत्थापन आ में देने से

$$आ = २अ^२ कोस्पष — \frac{४अ^२}{३} कोस्प^३ष + \frac{४अ^२}{३} (कोछे^२ ष — २)^{\frac{३}{२}} + स्थि$$

$$= २अ^२ कोस्पष + \frac{४अ^२}{३} \left\{ (कोछे^२ष—२)^{\frac{३}{२}} — कोस्प^३ ष \right\} + स्थि$$

$$= २अ^२कोस्पष + \frac{४ अ^२}{३} \left\{ \frac{(१—२ज्या^२ष)^{\frac{३}{२}}—ज्या^३षकोस्प^३ष}{ज्या^३ष} \right\} + स्थि$$

$$= २अ^२कोस्पष + \frac{४ अ^२}{३} \frac{(कोज्या२ष)^{\frac{३}{२}}—कोज्या^३ष}{ज्या^३ष} + स्थि$$

१२२। जिस सर्पिल का अक्षीयसमीकरण श्रु = अप^न यह है उस का फलानयन।

$$यहाँ\ आ = \frac{१}{२}\int श्रु^२ताष = \frac{१}{२}\int अ^२ष^{२न} ताष = \frac{अ^२}{२}\int ष^{२न}ताष$$

$$= \frac{अ^२}{२(२न+१)} ष^{२न+१} + स्थि = \frac{अ^२ष^{२न} \times ष}{२(२न+१)} + स्थि = \frac{श्रु^२ \times ष}{२(२न+१)} + स्थि$$

$$= \frac{श्रु^२ \times (\frac{श्रु}{अ})^{\frac{१}{न}}}{२(२न+१)} + स्थि = \frac{श्रु^{\frac{२न+१}{न}}}{२अ^{\frac{१}{न}} (२न+१)} + स्थि$$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से जब ष = ०, श्रु = ० और फल = ० इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा। इस में यदि न = १ तो सर्पिल आर्किमिडिज़ का हो जायगा इस की

आकृति चलन कलन के २८६ प्रक्रम में लिखी है यहाँ भी बोध के लिये नीचे लिखा है ।

इस में अ, ध्रुव, अय स्थिर रेखा जिस से प की गणना है। य से त की ओर धन गणना है। जब प = ० तब श्रु = अ·प = ०। जब प = $\frac{\pi}{२}$। तब श्रु = $\frac{अ\pi}{२}$ = अड। जब प = π, तब श्रु = अग = अथ।

इसी तरह जब प = २π तब श्रु = २ अ π = अक। इस लिये अ के चारो ओर श्रुति के एक बार घूमने में अडलपटथ ड' प' क खण्ड उत्पन्न हुआ।

इस खण्ड और अक श्रुति से जो क्षेत्र बना है उस का फल ऊपर फल के समीकरण में अर्थात् $\frac{श्रु^{\frac{२न+१}{न}}}{२अ^{\frac{१}{न}}(२न+१)}$ इस में न के स्थान में १ और श्रु के स्थान में २अ π का उत्थापन देने से $\frac{श्रु^३}{६ अ} = \frac{८अ^३ \times \pi^३}{६ अ} = \frac{४ अ^२\pi^३}{३} = \frac{\pi \times (२अ\pi)^२}{३}$

$= \frac{\pi श्रु^२}{३}$ ऐसा होगा यदि श्रु = २ अπ । और जब श्रुति का दो फेरा होगा तब श्रु = ४ अ π = २श्रु इस का फल में उत्थापन देने से $\frac{\pi(२श्रु)^३}{३ श्रु}$ यह मान जो आवेगा इस में अ के चारो ओर श्रुति के दो बार घूम जाने के कारण अडलपट थड' प'क दो बार आजायगा इस लिये श्रुति के दो बार फेरा करने से सर्पिल का ठीक फल = $\frac{\pi(२श्रु)^३}{३श्रु} - \frac{\pi श्रु^२}{३} = \frac{७\pi श्रु^२}{३}$ यह होगा और

दोनों फेरों के चापों के अन्तर में $\frac{७\pi श्रु^२}{३} - \frac{\pi श्रु^२}{३} = \frac{६\pi श्रु^२}{३}$

$= २\pi श्रु^२$ यह फल होगा।

इसी तरह श्रुति के न वार फेरा करने में श्रु = नश्रु और न—१ वार फेरा करने में श्रु = (न—१) श्रु।

इस लिये श्रु के न वार फेरा करने में फल $= \frac{\pi}{३} \; \frac{(नश्रु)^३-(न-१)^३श्रु^३}{श्रु}$

$$= \frac{\pi श्रु^२}{३} \left\{ न^३ — (न—१)^३ \right\}$$

और न + १ वार फेरा करने में फल $= \frac{\pi श्रु^२}{३} \left\{ (न+१)^३ — न^३ \right\}$

इस लिये न और न + १ वार फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर में

फल $= \frac{\pi श्रु^२}{३} \left\{ (न+१)^३ + (न—१)^३ — २न^३ \right\} = \frac{\pi श्रु^२}{३} \times ६न = २न\pi श्रु^२$

= प्रथम और दूसरे फेरे के चापों के अन्तर सम्बन्धी फल का न गुना यह सिद्ध होता है।

इस सर्पिल के विषय में आगे कुछ और विचार किया जायगा।

१२३। इलामूलक के फल का आनयन।

यहाँ $श्रु^२ = २ क^२$ कोज्या२ष

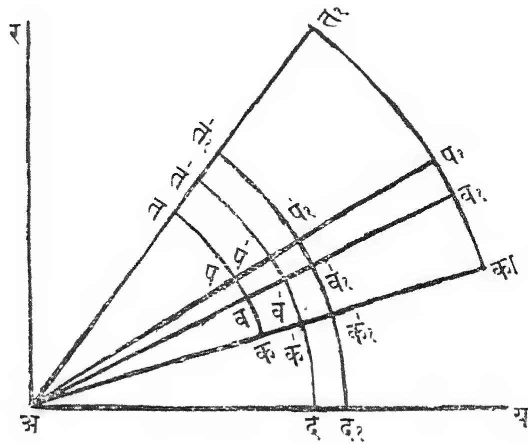
इस लिये $आ = क^२ \int$ कोज्या २ ष ताष $= \frac{क^२}{२}$ ज्या२ष + स्थि।

यहाँ वक्र के लक्षण से जब ष = ० तब आ = ० इस लिये स्थि = ०।

तब $आ = \frac{क^२}{२}$ ज्या२ष इस में ष के स्थान में $\frac{\pi}{४}$ का उत्थापन देने से

चतुर्थांश फल $= \frac{क^२}{२}$ इस को ४ से गुणने से संपूर्ण इलामूलक का फल $= २ क^२$

१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन। कल्पना करो कि अ ध्रुवस्थान और अय, अर अक्ष से जो काव₁प₁त₁ कवपत वक्र के चाप और काक, तत₁श्रुत्यन्तर से क्षेत्र है उस के फल का ज्ञान करना है।



अवव$_१$, अपप$_१$ अत्यन्त निकट दो श्रुति रेखा खींचो। अव = श्रु, अप = श्रु + △श्रु । अव$_१$ = श्रु$_१$ । अप$_१$ = श्रु$_१$ + △श्रु$_१$ । और
∠व$_१$ अप$_१$ = △ष । और कवपत वक्र का समीकरण श्रु = फ(ष) और का व$_१$प$_१$त$_१$ का समीकरण श्रु$_१$ = फा(ष) समझो तो पव और प$_१$व$_१$ को अत्यल्प होने के कारण सरल रेखा मान लेने से

अकव, अकप वक्र त्रिभुज का अन्तर = △अवप = $\frac{१}{२}$△ष श्रु (श्रु + △श्रु) और काअव$_१$ काअप$_१$ का अन्तर = △अव$_१$प$_१$ = $\frac{१}{२}$△ष श्रु$_१$(श्रु$_१$ + △श्रु$_१$)

इस लिये दोनों का अन्तर = काकपप$_१$−काकवव$_१$ = व$_१$वपप$_१$ = △आ = $\frac{१}{२}$△ष { श्रु$_१$(श्रु$_१$ + △श्रु$_१$)—श्रु(श्रु + △श्रु) }

इस लिये $\frac{\triangle आ}{\triangle ष}$ = $\frac{१}{२}$ { श्रु$_१$(श्रु$_१$ + △श्रु$_१$)—श्रु(श्रु + △श्रु) }

इस में ष मान शून्य मानने से श्रु$_१$ = ०, श्रु = ०, इस लिये

$\frac{ताआ}{ताष}$ = $\frac{१}{२}$ (श्रु$_१^२$—श्रु^{२}) = $\frac{१}{२}$ [{ फा(ष) }^{२}— { फ(ष) }^{२}]

इस लिये आ = $\frac{१}{२}\int$ [{ फा(ष) }^{२}— { फ(ष) }^{२}]ताष

यदि ∠यअका = अ$_१$, ∠यअत$_१$ = क$_१$ तो काकवपतत$_१$प$_१$व$_१$का का फल आ =

$$\frac{१}{२}\int_{अ_१}^{क_१} [\{ फा(ष) \}^२ — \{ फ(ष) \}^२]ताष \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

जब $\int$ श्रु ताश्रु = $\frac{श्रु^२}{२}$ ± स्थि इस लिये $\int_{फ(ष)}^{फा(ष)}$ श्रु ताश्रु

$= \frac{1}{2}[\{फा(ष)\}^2 - \{फ(ष)\}^2]$ इस पर से (१) समीकरण को द्विगुण चलानयन की रीति से $\int_{अ_1}^{क_1}\int_{फ(ष)}^{फा(ष)}$ श्रु ताश्रु ताष ऐसे लिख सकते हो।

१२५। इसी जगह यदि $ष = फ(श्रु)$, $ष_1 = फा(श्रु)$ ऐसे दो समीकरण के वक्र के चापों से और $श्रु = अ$, $श्रु_1 = क$ ऐसे समीकरण के दो वृत्तों के चापों से बने क्षेत्र का फल जानना हो तो मान लो कि कक'क'$_1$का, तत'त'$_1$त$_1$ दो वक्र के चाप और कवपत, काव$_1$प$_1$त$_1$ दो वृत्त के चाप हैं जिन का अ केन्द्र है। अ केन्द्र से दक'व'प'त', और द$_1$क'$_1$व'$_1$प'$_1$त'$_1$ वृत्त का चापखण्ड बनाओ जिनके व्यासार्द्ध श्रु, श्रश्रु + श्रु हैं। तो चलनकलन के १५९ वें प्रक्रम से त'त'$_1$प'$_1$व'$_1$क'$_1$क'व'प'त' का फल = आ

$$= \frac{\{श्रु(ष_1 - ष) + (श्रु + \triangle श्रु)(ष_1 - ष)\}\triangle श्रु}{2}$$ । $\triangle श्रु$ का भाग दे देने से

$$\frac{आ}{श्रु} = \frac{श्रु(ष_1 - ष) + (श्रु + \triangle श्रु)(ष_1 - ष)}{2}$$

इस लिये

$$\frac{ताआ}{ताश्रु} = श्रु(ष_1 - ष) = श्रु\{फा(श्रु) - फ(श्रु)\}$$

इस लिये अभीष्ट क्षेत्र का फल

$$= \int_{अ}^{क} श्रु\{फा(श्रु) - फ(श्रु)\} ताश्रु = आ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

जब $\int श्रुताष = श्रु \int ताष = श्रुष$, श्रु को स्थिर मानसे से

इस लिये $\int_{फ(श्रु)}^{फा(श्रु)} श्रुताष = श्रु\{फा(श्रु) - फ(श्रु)\}$

इस लिये द्विगुणचलानयन की रीति से ऊपर के फल को

$\int_{अ}^{क}\int_{फ(श्रु)}^{फा(श्रु)}$ श्रुताष ताश्रु ऐसे लिख सकते हो। यदि यहाँ दो वक्रों के चापान्तर्गत सीमित दोनों कर्णों के अनेक विभाग कर ध्रुव विन्दु से प्रत्येक विभाग पर गया ऐसा अनेक वृत्त बना डालो और वक्र चापों का भी अनेक विभाग कर प्रति विभागों में जो रेखा लगा दो तो रेखा और वृत्त के चापखण्डों से अनेक चतुर्भुज होंगे जिन में किसी एक का फल = श्रष यह होगा ।

१२६। जैसे अपक, अपाका वृत्तार्द्ध के चापों से और कका रेखा से बने क्षेत्र का फल जानाना है तो मानो अक = ग, अका = च ∠काअपा = ष, तो अप = श्रु = गकोज्याष, अपा = $श्रु_१$ = चकोज्याष

इस लिये १२४ प्रक्रम से

$$\text{अभीष्ट फल} = \int_{अ_१}^{क_१} \int_{फ(ष)}^{फा(ष)} श्रुताश्रु\ ताष = \int_0^{\frac{\pi}{२}} \int_{गकोज्याष}^{चकोज्याष} श्रुताश्रु\ ताष$$

$$\text{अब यहाँ} \int_{गकोज्याष}^{चकोज्याष} श्रुताश्रु = \tfrac{१}{२}\,(च^२ - ग^२) कोज्या^२ष$$

$$\text{इस लिये अभीष्ट फल} = \tfrac{१}{२}\,(च^२ - ग^२) \int_0^{\frac{\pi}{२}} कोज्या^२ष\ ताष$$

$$\text{इस में} \int कोज्या^२ष\ ताष = \int \frac{१ + कोज्या२ष}{२} ताष = \frac{ष}{२} + \frac{ज्या२ष}{४}$$

इस लिये $\int_0^{\frac{\pi}{२}} कोज्या^२ष\ ताष = \frac{\pi}{४}$ इस का उत्थापन फल में देने से फल = $\frac{\pi}{८}(च^२ - ग^२)$।

इसी क्षेत्र का यदि अक व्यासार्द्ध से बना $कक_१$ स वृत्त चाप से दो खण्ड करें तो पहले अम, मक, अपक, वृत्त चापों से बने क्षेत्र का फल १२५ वें प्रक्रम से, मान लो कि कपस एक वृत्त का चाप, और दूसरे वृत्त का अ विन्दु रूप चाप, एक वक्र अपक वृत्तार्द्ध चाप, और दूसरा अस बड़े वृत्तार्द्ध का चाप इन से बना हुआ क्षेत्र है। यहाँ श्रु = गकोज्याष। और दूसरी श्रु = चकोज्याष

इस लिये ष = कोज्या$^{-१}\frac{श्रु}{ग}$, और $ष_१$ = कोज्या$^{-१}\frac{श्रु}{च}$, क = ग, अ = ०

इन का उत्थापन देने से

$$\int_क^अ \int_{फ(श्रु)}^{फ'(श्रु)} श्रुताष\ ताश्रु = \int_0^ग \int_{कोज्या^{-१}\frac{श्रु}{ग}}^{कोज्या^{-१}\frac{श्रु}{च}} श्रुताषताश्रु$$

यहाँ $\int_{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुताष} = \text{श्रु}\left[\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}\right]$

और $\int \text{श्रुकोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\ \text{ताश्रु} = \frac{1}{4}\{(2\text{श्रु}^2 - \text{च}^2)\ \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}$
$-\text{श्रु}\sqrt{(\text{च}^2 - \text{श्रु}^2)}\}$ ।

$\int \text{श्रुकोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}\ \text{ताश्रु} = \frac{1}{4}\{(2\text{श्रु}^2 - \text{ग}^2)\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}$
$-\text{श्रु}\sqrt{(\text{ग}^2 - \text{श्रु}^2)}\}$

इस लिये $\int_0^{\text{ग}} \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\ \text{ताश्रु}$

$= \frac{1}{4}\{(2\text{ग}^2 - \text{च}^2)\ \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{ग}}{\text{च}} - \text{ग}\sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} + \text{च}^2\ \frac{\pi}{2}\}$

और $\int_0^{\text{ग}} \text{श्रुकोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}\ \text{ताश्रु} = \frac{1}{4}\left\{\text{ग}^2\ \frac{\pi}{2}\right\}$

इस लिये

$$\int_0^{\text{ग}}\int_{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुताषताश्रु}$$

$= \frac{1}{4}\{(2\text{ग}^2 - \text{च}^2)\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{ग}}{\text{च}} - \text{ग}\sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} + \frac{\pi}{2}(\text{च}^2 - \text{ग}^2)\}$ यह एक खण्ड का फल हुआ।

अब कस वृत्तचाप, कास वृत्तचाप, और कका रेखा से उत्पन्न क्षेत्र के फल साधन में एक वक्र के चाप को कका रेखा समझो और दूसरे वक्र को असका मान लो तो $\text{ष} = 0 = \text{फ}(\text{श्रु})$, $\text{ष}_1 = \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} = \text{फा}(\text{श्रु})$, क = च, अ = ग। इनका उत्थापन १२५ वें प्रक्रम के (१) समीकरण के दूसरे रूप में देने से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{\text{फ}(\text{श्रु})}^{\text{फा}(\text{श्रु})} \text{श्रुताषताश्रु} = \int_{\text{ग}}^{\text{च}}\int_0^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुताषताश्रु}$$

यहाँ भी पहले खण्ड के फल साधन के ऐसा

$$\int_{0} \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\,\text{श्रु}\text{ताष} = \text{श्र}\ \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}$$

$$\int \text{श्रु}\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\ \text{ताश्रु} = \frac{1}{4}\left\{(2\text{श्रु}^2 - \text{च}^2)\ \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{श्रु}\sqrt{(\text{च}^2 - \text{श्रु}^2)}\right\}$$

इस लिये

$$\int_{\text{च}}^{\text{ग}} \int_{0}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्र}\ \text{ताष}\ \text{ताश्रु}$$

$$= \int_{\text{ग}}^{\text{च}} \text{श्रु}\ \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\text{ताश्रु}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\text{ग}\sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} - (2\text{ग}^2 - \text{च}^2)\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{ग}}{\text{च}}\right\}$$

यही दूसरे खण्ड का फल हुआ।

अब इन दोनों खण्डों का योग करो तो $\frac{\pi}{8}(\text{च}^2 - \text{ग}^2)$ यह सम्पूर्ण क्षेत्र का फल ठीक पहले ही के तुल्य आया।

१२७। यदि अक्षीय समीकरण पर से ११५ प्रक्रम के अलक क्षेत्र का फल साधन करें तो यहाँ न को ध्रुव स्थान मानने से परवलय का समीकरण $\text{श्रु} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\frac{\text{ष}}{2}}$ जहाँ ष का मान नक रेखा से लिया गया है। और वृत्त का अक्षीय समीकरण $\text{श्र} = 2\ \text{अ}$। इस लिये पहले श्रु के वश चलानयन करने से अलक का फल $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\text{अछे}^2\frac{\text{ष}}{2}}^{2\text{अ}} \text{श्रु}\ \text{ताश्रु}\ \text{ताष}$

इसी जगह यदि ष के वश से पहले चलानयन करें तो ष_1 $= \text{कोज्या}^{-1}\frac{2\text{अ} - \text{श्रु}}{\text{श्रु}}$ मान लेने से अलक का फल $= \int_{\text{अ}}^{2\text{अ}} \int_{0}^{\text{ष}_1} \int \text{श्रु}\,\text{ताष}\text{ताश्रु}$।

यदि घलग का फल अपेक्षित हो तो घग का अक्षीय समीकरण $\text{श्रु} = -\frac{2\text{अ}}{\text{कोज्याष}}$ और नग = ४अ, $\angle$कनग $= \frac{2\pi}{3}$, और मान लो कि ष_1 $= \text{कोज्या}^{-1}\frac{2\text{अ} - \text{श्रु}}{\text{श्र}}$ और $\text{ष}_2 = \left[\frac{-2\text{अ}}{\text{श्रु}}\right]$। अब यहाँ पहले ष के वश

चलानयन करने से घलग का फल $= \int_{\text{२अ}}^{\text{४अ}} \int_{\text{ष}_१}^{\text{ष}_२} \text{श्रु ताषताश्रु}$ । इसी का फल नग रेखा से दो भाग कर पृथक् पृथक् लावें तो पहले उस खण्ड का फल जिस में लग चाप है $\int_{\frac{\pi}{२}}^{\frac{२\pi}{३}} \int_{\text{२अ}}^{\text{अछे}^२ \frac{\text{प}}{२}} \text{श्रुताश्रुताप}$ यह होगा फिर दूसरे खण्ड का फल $= \int_{\frac{२\pi}{३}}^{\pi} \int_{\text{२अ}}^{\text{२अछेप}} \text{श्रुताश्रुताप}$ यह होगा और इन दोनों का योग ठीक पहले के बराबर क्षेत्र फल निकल आवेगा। इस तरह से जहाँ पर जैसा सुभीता जान पड़े तहाँ पहले श्रु के वश अथवा प के वश चलानयन करो।

१२८। १२२ प्रक्रम में जो आर्किमिडिज़ का सर्पिल है उस में $\text{व}_१\text{वम}$ को एक वक्रचाप और $\text{भ}_१$ भन को दूसरे वक्र का चापखण्ड मान लो तो १२४ प्रक्रम की युक्ति से $\text{व}_१ \ \text{भ}_१$ नम का फल $= \int_{\text{ष}_१}^{\text{ष}_२} \int_{\text{फ(ष)}}^{\text{फा(ष)}} \text{श्रु ताश्रु ताष}$ ऐसा होगा। यहाँ $\text{फ(ष)} = \text{अष}$ और $\text{फा(ष)} = \text{अ(ष} + २\pi)$ मानो तो

$$\int_{\text{फ(ष)}}^{\text{फा(ष)}} \text{श्रु ताश्रु} = \tfrac{१}{२}\left[\{ \text{फा(ष)} \}^२ - \{ \text{फ(ष)} \}^२ \right]$$

$$= \tfrac{१}{२}(\text{अ}^२ \text{ष}^२ + ४\text{अ}^२\text{ष}\pi + ४\text{अ}^२\pi^२ - \text{अ}^२\text{ष}^२) = \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ (\text{ष} + २\pi)^२ - \text{ष}^२ \right\}$$

और $\int \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ (\text{ष} + २\pi)^२ - \text{ष}^२ \right\} \text{ताष} = \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ \frac{(\text{ष} + २\pi)^३}{३} - \frac{\text{ष}^३}{३} \right\}$

इस लिये

$$\int_{\text{ष}_१}^{\text{ष}_२} \int_{\text{फ(ष)}}^{\text{फा(ष)}} \text{श्रुताश्रुताष} = \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ \frac{(\text{ष}_२ + २\pi)^३ - \text{ष}_२^३}{३} - \frac{(\text{ष}_१ + २\pi)^३ - \text{ष}_१^३}{३} \right\}$$

$$= \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ \frac{\times\, ६\text{ष}_२^२\pi + १२\text{ष}_२\pi^२ + ८\pi^३ - ६\text{ष}_१^२\pi - १२\text{ष}_१\pi^२ - ८\pi^३}{३} \right\}$$

$$= \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ २\text{ष}_२^२\pi + ४\text{ष}_२\pi^२ - २\text{ष}_१^२\pi - ४\text{ष}_१\pi^२ \right\} = \frac{\text{अ}^२}{२}\left\{ २\pi(\text{ष}_२^२ - \text{ष}_१^२) + ४\pi२(\text{ष}_२ - \text{ष}_१) \right\}$$

यह फल हुआ। इस में यदि $प_२ = २नπ$ और $प_१ = २π(न-१)$ हो तो न और न+१ वार श्रु के फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर का फल

$$= \frac{अ^२}{२}\left\{ २π(प_२^२ - प_१^२) + ४π^२(प_२ - प_१) \right\}$$

$$= \frac{अ^२}{२}\left\{ २π(४न^२π^२ - ४न^२π^२ + (नπ^२ - ४π^२) + ८π^२ \right\}$$

$$= \frac{अ^२}{२}(१६\,नπ^२) = ८नअ^२π^२ = २πन \times ४π^२अ^२ = २πनश्रु^२$$

यही ठीक १२२वें प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था परन्तु इस क्रिया से वहुत ही स्पष्ट रूप से उपपन्न होता है और १२२वें प्रक्रम में जो युक्ति लिखी है वह वड़े गाम्भीर्य विचार करने से तब मन में वैठती है॥

१२९। अपचक्रालद के अक्षीय समीकरण पर से फलानयन। (११७ प्रक्रम का (३) समीकरण देखो) फल = आ = $\frac{१}{२}\int \frac{लश्रुताश्रु}{\sqrt{(श्रु^२ - ल^२)}}$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से $ल = \frac{ग\sqrt{(श्रु^२ - अ^२)}}{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}$ (८२ प्रक्रम देखो)

इस लिये फल = $\frac{१}{२}\int \frac{ग\sqrt{(श्रु^२ - अ^२)}श्रुताश्रु}{अ\sqrt{(ग^२ - श्रु^२)}} = \frac{ग}{२अ}\int \frac{\sqrt{(श्रु^२ - अ^२)}श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^२ - श्रु^२)}}$

$= \frac{ग}{२अ}\int \frac{व^२ताव}{\sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२)}}$ यदि $व^२ = श्रु^२ - अ^२$

अब $\int \frac{व^२ताव}{\sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२)}} = \int \frac{व^२ - (ग^२ - अ^२)}{\sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२)}}$ ताव

$+ (ग^२ - अ^२)\int \frac{ताव}{\sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२)}} = (ग^२ - अ^२)\int \frac{ताव}{\sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२)}}$

$- \int \sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२)}ताव = \frac{ग^२ - अ^२}{२} ज्या^{-१}\frac{व}{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}$

$- \frac{व\sqrt{(ग^२ - अ^२ - व^२}}{२} = \frac{ग^२ - अ^२}{२} ज्या^{-१}\frac{\sqrt{(श्रु^२ - अ^२)}}{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}$

$- \frac{\sqrt{(श्रु^२ - अ^२)}\sqrt{(ग^२ - श्रु^२)}}{२}$ इस पर से

श्र = अ और श्रु = ग इस के भीतर का मान = $\frac{ग^२ - अ^२}{२}\,\frac{π}{२}$ इस

को $\frac{ग}{२अ}$ से गुण देने से $\frac{ग}{२अ} \cdot \frac{ग^2 - अ^2}{२} \frac{\pi}{२}$ इस में ग के स्थान में अ + २क का उत्थापन देने से

$\frac{(अ+२क)\,क\,(अ+क)\pi}{२अ}$ इस को दूना करने से चलितवृत्त के एक वार घूम जाने से जो वक्र का अवयव और तत्सम्बन्धी श्रुतियों से उत्पन्न क्षेत्र का फल $= \frac{(अ+२क)\,क\,(अ+क)\pi}{अ}$।

यहां पर दोनों श्रुतियाँ स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध = अ है और तदन्तर्गत स्थिरवृत्त का चाप चलितवृत्त के परिधि २कπ तुल्य है इस लिये उस वृत्तखण्ड का फल = अकπ इस को ऊपर के फल में घटा देने से स्थिरवृत्त के परिधि और वक्र चाप से उत्पन्न फल

$$= \frac{(अ+२क)\,क\,(अ+क)\pi}{अ} - अक\pi$$

$$= \frac{क(अ^2 + ३अक + २क^2)\pi - अ^2क\pi}{अ} = \frac{\pi क^2}{अ}(३अ + २क)$$

इसी तरह से अतिचक्रालद में यदि अ $>$ क तो क का चिह्न वदल देनेसे फल $\frac{\pi क^2}{अ}(३अ - २क)$ यह होगा।

१३०। एक वक्र का फ$\left(\frac{य}{अ}, \frac{र}{क}\right)$ = ग . . . . (१) यह समीकरण और दूसरे वक्र का फ(य,र) = ग यह समीकरण है इस को (२) कहो अब इन दोनों वक्रों के किसी साजात्य अवयव के फलों का सम्बन्ध जानना है।

(१) में यदि $\frac{य}{अ} = य'$ और $\frac{र}{क} = र'$ तो (१) में

ताय = अताय' इस लिये (२) का फल $= \int र' ताय' = \int \frac{र}{क} \cdot \frac{ताय}{अ} = \frac{१}{अक} \int रताय$

अर्थात् (२) का फल $= \frac{१}{अक} \times$ (१) का फल

इस लिये अक × (२) का फल = (१) का फल।

जैसे (१) दीर्घवृत्त में यदि केन्द्र को मूल विन्दु मानो तो

$$\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} = १ \quad . . . . . . (१)$$

और वृत्त में $य^२ + र^२ = १$ (जिस का व्यासार्द्ध = १ है) . . . (२)

इस लिये (२) का फल × अक = (१) का फल

अर्थात् (१) का समग्र फल = (२) का समग्र फल × अक = अकπ

$= \frac{अ}{क}$ $अ^२\pi$ यही पहले १०४ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था

(२) अतिपरवलय में $\frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२} = १$ . . . . . (१)

और समातिपरवलय में $य^२ — र^२ = १$ . . . . . (२)

इस लिये (२) का फल × अक = (१) का फल ।

(३) जिस वक्र का $\left[\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२}\right]^२ = \frac{य^२}{त^२} + \frac{र^२}{म^२}$ यह समीकरण है उस के फल को जानना है । इस में यदि $य = अय'$ और $र = कर'$ तो वक्र के समीकरण का रूपान्तर $(य'^२ + र'^२)^२ = \frac{अ^२य'^२}{त^२} + \frac{क^२र'^२}{म^२}$ . . . . . . (२)

अब इस के फल को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र का फल ऊपर की युक्ति से हो जायगा ।

(२) के फल जानने के लिये इस का अक्षीय समीकरण बनाओ तो

$श्रु^४ = \frac{अ^२य'^२}{त^२} + \frac{क^२र'^२}{म^२}$, $श्रु^२$ का भाग दे देने से

$$श्रु^२ = \frac{अ^२कोज्या^२प}{त^२} + \frac{क^२ज्या^२प}{म^२}$$

$$इस\ लिये\ फल = \frac{१}{२}\int श्रु^२ताप = \frac{१}{२}\int \frac{अ^२कोज्या^२प}{त^२}ताप + \frac{१}{२}\int \frac{क^२ज्या^२प}{म^२}ताप$$

$$= \frac{अ^२}{२त^२}\int \frac{१ + कोज्या२प}{२}ताप + \frac{क^२}{२म^२}\int \frac{१ — कोज्या२प}{२}ताप$$

$$= \frac{अ^२}{२त^२}\int \left(\frac{प}{२} + \frac{ज्या२प}{४}\right) + \frac{क^२}{२म^२}\left(\frac{प}{२} - \frac{ज्या२प}{४}\right)$$

प का मान ० और $\frac{\pi}{२}$ मानने से

चतुर्थांश फल $= \frac{अ^२}{२त^२}\frac{\pi}{४} + \frac{क^२}{२म^२}\cdot\frac{\pi}{४}$, इस को ४ गुना कर देने से समग्र फल $= \frac{\pi}{२}\left[\frac{अ^२}{त^२} + \frac{क^२}{म^२}\right]$ और इस को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र

का समग्र फल $= \frac{\text{अकग}}{2}\left[\frac{\text{अ}^2}{\text{त}^2}+\frac{\text{क}^2}{\text{म}^2}\right]$

ऊपर के सिद्धान्त अर्थात् $\text{फ}(\frac{\text{य}}{\text{अ}},\frac{\text{र}}{\text{क}})=\text{ग}$ । $\text{फ}(\text{य},\text{र})=\text{ग}$ इस में यदि अ = क तो (१) का फल = $\text{अ}^2 \times$ (२) का फल ऐसा होगा अर्थात् दोनों वक्र सजातीय होंगे और (२) के फल को अ^2 से गुण देने से (१) का फल होगा। देखो ऐसे दो वक्रों में सजातीय भुज वा कोटि में अ:१ का सम्बन्ध रहेगा और फल में अ^2:१ इस का सम्बन्ध। इस लिये रेखागणित से जैसा सजातीय ऋजुबहुभुज क्षेत्रों में धर्म्म सिद्ध होता है वैसा ही ऊपर की युक्ति से सजातीय वक्रों में भी सिद्ध हुआ।

१३१। वक्र चाप और वक्र के अवलूत चाप से बने क्षेत्र का फलानयन। ९६ प्रक्रम के (१) और (२) क्षेत्र में व,व को तनिक सा उठावो तो दूसरा वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान होगा दोनों को बहुत पास होने से यदि तुल्य मानो और व_1 के पास ही चलित विन्दु मानो और इन दोनों व्यासार्द्धों से उत्पन्न कोण का मान व_1 मान लो तो स्वल्पान्तर से दोनों व्यासार्द्ध, और वक्र का चाप इन से बने वृत्तखण्ड का फल $\triangle \text{आ} = \frac{1}{2}\,\text{वव}_1^2 \triangle \text{व}_1$

और $\frac{\triangle \text{आ}}{\triangle \text{व}_1} = \frac{1}{2}\,\text{वव}_1^2$ अब इस में $\triangle \text{व}_1 = 0$ मानो तो ठीक ठीक $\frac{\text{ताआ}}{\text{ताव}_1}$ $= \frac{1}{2}\,\text{वव}_1^2$ यह अभीष्ट क्षेत्र के फल का तात्कालिक सम्बन्ध ताव_1 के वश से उत्पन्न हुआ।

यहाँ यदि आ को अवलूत का चाप, वक्र का चाप, और दो वक्रजातीयव्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्रका क्षेत्रफल समझो और दोनों वक्रजातीयव्यासार्द्ध सम्बन्धी व_1 का मान व_2, व_3 मान लो तो

$$\text{आ} = \frac{1}{2}\int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3} \text{वव}_1^2 \text{ताव}_1 \text{ यह होगा}$$

यहाँ वव_1 वक्रजातीयव्यासार्द्ध के स्थान में $\text{वि} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1}$ (चलनकलन के १७१वें प्रक्रम से) इस का उत्थापन दे दें तो

$$\text{आ} = \frac{1}{2}\int \text{वि ताचा} = \frac{1}{2}\int \text{वि} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ताय ऐसा होगा}$$

१३२। कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्र का फलानयन।

यहाँ चा = ग· स्पव$_१$ (९४ प्रक्रम से)

इस लिये $\frac{ताचा}{ताव_१}$ = वि = ग छे^{२}व$_१$

और $आ = \frac{१}{२}\int_{व_२}^{व_१} वि^२ ता व_१ = \frac{१}{२}\int_{व_२}^{व_१} ग^२ छे^४ व_१ ताव_१$

$= \frac{ग^२}{२}\int_{व_२}^{व_१} छे^४ व_१ ताव_१$

यहाँ $\int छे^४ व_१ ताव_१ = स्पव_१ + \frac{१}{३} स्प^३व_१ + स्थि$

इस पर से व$_१$, व$_२$ का इष्टमान मानने से अभीष्ट क्षेत्र का फल जान सकते हो।

१३३। वक्र के प्रतिविन्दु सम्बन्धि स्पर्शरेखाओं के ऊपर कोई स्थिर विन्दु से (जो कि उसी धरातल में है जिस में कि वक्र है) लम्ब डालें और इन लम्बमूलों में लगाकर एक वक्र रेखा कर दें तो इस वक्र को पहले वक्र का पाददल कहते हैं।

जिस स्थिरविन्दु से लम्ब डाले गये हैं इसको पाददल का मूलविन्दु कहते हैं और जिस वक्र का पाददल वक्र वनावोगे उसे पाददल का मूलवक्र कहते हैं।

१३४। पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओं पर दो लम्ब डाले जायँ तो पाददल का चाप और इन दोनों लम्बों से बने क्षेत्र का फल = $\frac{१}{२}\int ल^२ ताप$ (जहाँ कोई नियत रेखा और लम्ब से उत्पन्न कोण = प है) क्योंकि पाददल में मूल वक्र के स्पर्शरेखा पर जो मूलविन्दु से लम्ब डाला जायगा वह लम्बही श्रुति होगी।

कल्पना करो कि अ, अ' दो मूलविन्दुओं से दो पाददल एकही मूलवक्र से बने हैं। और मूलवक्र के किसी दो स्पर्शरेखा पर दोनों मूलविन्दुओं से ल, ल' लम्ब डाले गये हैं। नियतरेखा समानान्तर है । अ मूलविन्दु से अ' की श्रुति, श्रु और श्रु और नियतरेखा से उत्पन्न कोण प$_१$ है तो प के दो मानों के भीतर पहले पाददल का फल = आ = $\frac{१}{२}\int ल^२ ताप$, और प के उन्हीं दो मानों के भीतर दूसरे

पाददल का फल = आ' = $\frac{१}{२}\int ल'^२ ताप$

परन्तु ल' = ल—श्रु कोज्या (प—प$_१$)

इस लिये $ल'^2 = ल^2 + २लश्रु$ कोज्या $(ष—ष_1) + श्रु^2$कोज्या$^2(ष-ष_1)$

इस लिये $आ' = \frac{1}{2}\int ल'^2$ताष$-\int$श्रुलकोज्या $(ष-ष_1)$ताष

$= \frac{1}{2}\int श्रु^2$ कोज्या^{2} $(ष-ष_1)$ताष

$=$ आ $-\int$लश्रुकोज्या $(ष—ष_1)$ताष $+ \frac{1}{2}\int श्रु^2$ कोज्या$^2(ष—ष_1)$ ताष

$=$ आ $-\int$लश्रु (कोज्याष कोज्याष$_1$ + ज्याष ज्याष$_1$) ताष

$+ \frac{1}{2}\int श्रु^2$ (कोज्याष कोज्याष$_1$ + ज्याष ज्याष$_1)^2$ताष

$=$ आ $-\int$ल(यकोज्याष$_1$ + रज्याष) ताष

$+ \frac{1}{2}\int(य^2$कोज्या^{2}ष + यरज्या२ष + $र^2$ज्या^{2}ष) ताष

यदि य = श्रुकोज्याष$_1$ । र = श्रुज्याष$_1$ . . . . . (१)

(१) में $\int$लकोज्याषताष = च, $\int$लज्याषताष = ज

$\frac{1}{2}$ कोज्या^{2}ष ताष = त, $\frac{1}{2}\int$ ज्या^{2}षताष = न, $\frac{1}{2}\int$ ज्याषकोज्याषताष = म

इन का उत्थापन दे देवो जहाँ सर्वत्र ष की दोनों सीमायें एकही हैं तो आ' = आ—(चय + जर) + तय^2 + २मयर + नर^2 . . . . . (२)

१३५। कल्पना करो कि किसी वक्र का अय^2 + कयर + गर^2 + घय + चर + फ = ० यह समीकरण है। इच्छा है कि यह पता लगावें कि यह कौन सा वक्र है।

यदि यह वक्र मूलविन्दु में भी गया होगा तो स्पष्ट है कि फ = ०। कल्पना करो कि मूलविन्दु में नहीं गया है तब फ का दोनों पक्षों में भाग देने से लब्धिओं को क्रम से अ', क' इत्यादि मान लेने से ऊपर के समीकरण का रूप

अ' य^2 + क' यर + ग'र^2 + घ'य च'र + १ = ०

जिस विन्दु का वक्र के मूलविन्दु से त,द भुज कोटि हैं उसको मूलविन्दु मानने से वक्र का भु = य = य' + त, र = र' + द इनका उत्थापन

अय^2 + कयर + गर^2 + घय + चर + फ = ० . . . . . (१)

इस में देने से

अ(य'^{2} + २तय' + त^2) + क (य'र' + य'द + र'त + तद) + ग (र'^{2} + २र'द + द^2)
+ घय + घत + चर' + चद + फ

= अय'^{2} + २तअय' + अत^2 + कय'र' + कदय' + कत' + कतद + गर'^{2} + २गदर'
+ गद'^{2} + घय' + घत + चर' + चद + फ

= अय'^{2} + कय'र' + गर'^{2} + (२तअ + कद + घ)य' + (२गद + कत + च)र' + फ' = ०···(२)

जहाँ फ' = अत^2 + कतद + घत + चद + फ, ... (३)

कल्पना करो कि इस में सम्भव है कि त, और द के ऐसे मान हैं कि $य^{\prime} र^{\prime}$ के गुणक शून्य के तुल्य होते हैं तो

$२तअ + कद + घ = ०$ और $२गद + कत + च = ०$

इन परसे $त = \frac{२गघ - कच}{क^{२} - ४अग}$, और $द = \frac{२अग - कघ}{क^{२} - ४अग}$

इस लिये निश्चय हुआ कि यदि $क^{२} - ४अग$ यह शून्य के तुल्य न हो तो त, द का मान ऐसा मान सकते हैं जिस पर से $य^{\prime}$, $र^{\prime}$ के गुणक शून्य हों। पहले मानो कि $क^{२} - ४अग$ यह शून्य नहीं है तो त, द के मान भी सान्त होंगे। और तब (२) का रूप $अय^{\prime २} + कय^{\prime}र^{\prime} + गर^{\prime २} + फ^{\prime} = ०$ . . . . . (४)

अब यह (४) समीकरण दिखलाता है कि धन, $य_{१}$, $र_{१}$ के वा, ऋण $य_{१}$, $र_{१}$ के मान में फल एक ही होगा इस लिये (१) समीकरण के वक्र का दूसरा मूलविन्दु (जिस का भु = त, को = द प्रथम मूलविन्दु के अभिप्राय से है) केन्द्र होगा।

त, द के मान का उत्थापन (२) में देने से

$फ^{\prime} = फ + \frac{गघ^{२} + अग^{२} + कगघ}{क^{२} - ४अग}$ ऐसा होगा।

(४) में स्वर चिह्न उड़ा देने से

$अय^{२} + कयर + गर^{२} + फ = ०$, ... (५)

इस में कल्पना करो कि मूल विन्दु तो वही है परन्तु य अक्ष नया पहले य अक्ष से प तुल्य कोण बनाने वाली रेखा को माना और इस पर मूल विन्दु पर जो रेखा लम्ब होगी वह नया र अक्ष माना तो इन अक्ष सम्बन्धी भुज = $य^{\prime}$, को = $र^{\prime}$ तो पहले अक्ष सम्बन्धी

$य = य^{\prime}कोज्याप - र^{\prime}ज्याप$, $र = य^{\prime}ज्याप + र^{\prime}कोज्याप$, इन का उत्थापन (५) वें में देने से

$$य^{\prime २}(अकोज्या^{२}प + गज्या^{२}प + कज्यापकोज्याप)$$
$$+ र^{\prime २}(अज्या^{२}प + गकोज्या^{२}प - कज्यापकोज्याप)$$
$$+ य^{\prime}र^{\prime}\{२(ग - अ)ज्यापकोज्याप + क(कोज्या^{२}प - ज्या^{२}प)\} + फ^{\prime} = ०, \cdots (६)$$

मान लो कि $य^{\prime}र^{\prime}$ का गुणक शून्य है तो

$२(ग - अ)ज्यापकोज्याप + क(कोज्या^{२}प - ज्या^{२}प) = ०$

$= (ग - अ)ज्या२प + ककोज्या२प$

इस लिये $स्प२प = \frac{क}{अ - ग}$, ... (७)

(७)वाँ दिखलाता है कि सर्वदा $य$ का मान ऐसा मान सकते हैं जिस में $य'र'$ का गुणक शून्य हो। $य'र'$ के गुणक को शून्य करने से (६) वें का रूप

$$य'^2 (अकोज्या^2य + गज्या^2य + कज्यायकोज्याय)$$
$$+ र'^2(अज्या^2य + गकोज्या^2य — कज्यायकोज्याय) + फ'$$
$$= आय'^2 + कार'^2 + फ' = ०, \qquad \ldots \qquad (८)$$

जहाँ $आ = \frac{1}{2} \{ अ + ग + (अ — ग)कोज्या२य + कज्या२य \}$

$का = \frac{1}{2} \{ अ + ग — (अ — ग) कोज्या२य — कज्या२य \}$

परन्तु $स्प२य = \frac{क}{अ-ग}$ $\therefore$ $कोज्या२य = \frac{अ — ग}{\sqrt{\{ क^2 + (अ-ग)^2 \}}}$

और $ज्या२य = \frac{क}{\sqrt{\{ क^2 + (अ — ग)^2 \}}}$ इन का उत्थापन देने से

$आ = \frac{1}{2}[अ + ग + \sqrt{\{ क^2 + (अ - ग)^2 \}}]$

$का = \frac{1}{2}[अ + ग — \sqrt{\{ क^2 + (अ - ग)^2 \}}]$

$य'र'$ के स्वर चिह्न को उड़ा देने से और $फ'$ का भाग देकर पक्षान्तरानयन से (८) वें का रूप $— \frac{आ}{फ'} य^2 — \frac{का}{फ'} र^2 = १$ यह समीकरण दिखलाता है कि यदि

(१) आ, का, $फ'$ एक ही चिह्न के होंगे तो वक्र असम्भव होगा।

(२) यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और उस से विरुद्ध चिह्न $फ'$ का हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा जिस के व्यासार्द्ध क्रम से $\sqrt{(— \frac{फ'}{आ})}, \sqrt{(— \frac{फ'}{का})}$ हैं।

(३) यदि आ, का विजातीय चिह्न के हों तो वक्र अतिपरवलय होगा।

(४) यदि आ = का और एक चिह्न के हों और उन से विजातीय $फ'$ हो तो वक्र वृत्त होगा।

(५) यदि $फ' = ०$ तो (८) वें समीकरण पर से $आय^2 + कार^2 = ०$ इस लिये वक्र मूलविन्दुरूप होगा यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और यदि भिन्न चिह्न के हों तो वक्र दो सरलरेखा रूप होगा जिन का समीकरण $र = \pm \sqrt{(— \frac{आ}{का})}\, य$ यह होगा।

ऊपर जो आ, का का मान ले आये हैं उन का यदि घात करो तो

$$आ \times का = \frac{(अ + ग)^2 — क^2 - (अ - ग)^2}{४} = \frac{४अग - क^2}{४}$$

इस लिये यदि आ, का भिन्न भिन्न चिह्न के होंगे तो ४अग – क^{२} यह ऋणात्मक होगा अन्यथा धन होगा।

इस लिये यदि वक्र असम्भव और विन्दुरूप न हो और वृत्त को भी एक प्रकार का दीर्घवृत्त ही समझें जिस का कि दोनों व्यासार्द्ध तुल्य हैं तो कह सकते हैं कि यदि ४अग–क^{२} यह धनात्मक हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा यह सिद्धान्त हुआ। इस में ४अग – क^{२} यह जब शून्य के तुल्य होगा तब त, और द के मान अनन्त होंगे इस स्थिति में वक्र का केन्द्र अनन्त दूर पर होगा अर्थात् वक्र परवलय ठहरेगा। इस में और भी अनेक विचार और सिद्धान्त हैं जिन का वर्णन करना चलराशिकलन में व्यर्थ है।

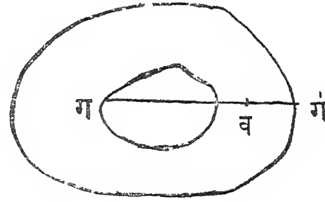
१३६। १३४ प्रक्रम (२) समीकरण में यदि पक्षान्तरानयन करो तो
$$\text{तय}^{२} + \text{२मयर} + \text{नर}^{२} - \text{चय} - \text{जर} - (\text{आ}' - \text{आ}) = ० \text{ ऐसा होगा।}$$

इस की यदि १३५ प्रक्रम के (१) समीकरण के साथ तुलना करो तो
$$\text{अ} = \text{त},\ \ \text{२म} = \text{क},\ \ \text{ग} = \text{न},\ \text{घ} = -\text{च},\ \ \text{च} = -\text{ज},\ \ \text{फ} = -\text{आ}' - \text{आ} \text{ ऐसा}$$
होगा। इस लिये
$$\text{४अग} - \text{क}^{२} = \text{४तन} - \text{४म}^{२} = \text{४}\ (\text{तन} - \text{म}^{२})$$
$$= (\int \text{कोज्या}^{२}\text{पताप})\ (\int \text{ज्या}^{२}\text{पताप}) - (\int \text{ज्यापकोज्यापताप})^{२}$$

परन्तु यहाँ दहना पक्ष चतुर्थाध्याय के १९ वें प्रश्न से धनात्मक होगा इस लिये उन पाददलों के मूलविन्दु सब एक दीर्घवृत्त के परिधि में होंगे जो मूलवक्र के नियत दो स्पर्शरेखान्तर्गत लम्ब और अपने चाप से तुल्य फल बनाते हैं। यदि इस दीर्घ वृत्त के भुज कोटि को इस के केन्द्र से गणना करें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से य, और र के गुणक शून्य होंगे अर्थात् च = ०, और ज = ०। इस लिये अनुमान कर सकते हो कि कोई पाददल का मूलविन्दु ऐसा भी होगा जिसमें च = ०, ज = ०। कल्पना करो कि अ के बदले इस को प्रथम मूलविन्दु माना तो १३४ प्रक्रम के (१) समीकरण से
$$\text{आ}' = \text{आ} + \tfrac{१}{२}\int \text{श्रु}^{२}\text{कोज्या}^{२}\ (\text{ष} - \text{ष}_{१})\text{ताष} \text{ ऐसा होगा}$$

यहाँ दहने पक्ष का दूसरा खण्ड सर्वदा धनात्मक है इस लिये आ' का मान आ से सर्वदा अधिक होगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि जिस पाददल के मूलविन्दु से च = ०, ज = ० हों उस का फल सब से छोटा होगा।

१३७। निर्दिष्ट लम्बाई की गग′ रेखा है इस का एक अग्र ग छोटे वक्र की परिधि पर और दूसरा अग्र बड़े वक्र की परिधि पर घूमता है इस लिये इस तरह से गग′ रेखा के घूमने से गग′ रेखास्थ व विन्दु भी किसी वक्र में घूमेगा। इच्छा है कि इस ब विन्दु के वक्र का फल ग और ग′ विन्दु के वक्रों के फलों से जानें।



कल्पना करो कि गव = ग, बग′ = ग′ और कोई परस्पर लम्बरूप अक्षों के वश से य$_1$, र$_1$, य, र और य$_2$, र$_2$ क्रम से ग, व, और ग′ के भुज कोटि हैं। गग′ रेखा और र अक्ष से उत्पन्न कोण ष समझो तो चलनकलन के ११ वें अध्याय से।

य$_1$ = य — गज्याष, र$_1$ = र — गकोज्याष।

य$_2$ = य + ग′ज्याष, र$_2$ = र + ग′कोज्याष।

इस लिये ताय$_1$ = ताय — गकोज्याषताष

और र$_1$ ताय$_1$ = (र — गकोज्याष) (ताय — गकोज्याषताष)

= रताय — गकोज्याष (रताष + ताय) + ग^2 कोज्या^{2}षताष

इसी तरह र$_2$ताय$_2$ = रताय + ग′कोज्याष (रताष + ताय) + ग′^{2}कोज्या^{2}षताष

पहले को ग′ और दूसरे को ग से गुण कर जोड़ देने से

ग′र$_1$ताय$_1$ + गर$_2$ ताय$_2$ = (ग + ग′) रताय + (ग + ग′) गग′ कोज्या^{2}षताष

$\therefore$ ग′$\int$ र$_1$ ताय$_1$ + ग$\int$र$_2$ ताय$_2$ = (ग + ग′)$\int$रताय
+ (ग + ग′) गग′$\int$कोज्या^{2}षताष

= (ग + ग′)$\int$रताय + (ग + ग′) गग′ $\int$ (१ + कोज्या२ष)/२ ताष

= (ग + ग′) $\int$रताय + (ग + ग′) गग′ (ष/२ + ज्या२ष/४)

यदि गग′ रेखा एक बार पूरा भ्रमण कर फिर अपने स्थान पर पहुंचे तो स्पष्ट है कि ष, ० और २π के बीच होगा, इस लिये सान्तचलनयन से

ग′ (गा) + ग (ग′ा) = (ग + ग′) (वा) + (ग + ग′) गग′ π

= [ग′ (गा) + ग (ग′ा)] / (ग × ग′) = (वा) + πगग′, यहाँ (गा), (वा), (ग′ा), क्रम से ग, व, ग′ विन्दुसम्बन्धि वक्रों के सम्पूर्ण फल हैं।

यदि ग, ग′ रेखा के अग्र एकही वक्र की परिधि पर घूमे तो (गा) = (ग′ा)

(गा) = (वा) + πगर्ग और (गा)—(वा) = πगर्ग इसलिये वक्र की परिधि और व विन्दूत्पन्न वक्र की परिधि के बीच जो क्षेत्र होगा उस का फल πगर्ग यह होगा ।

ग, र्ग विन्दु, घूमने के बदले झूल कर उलटा झलुअे के ऐसा यदि फिर पीछे से अपने स्थान पर पहुँचे तो स्पष्ट है कि (गा) = ०, (र्गा) = ० इसलिये (वा) = −πगर्ग । ऋण चिह्न दिखलाता है कि जिधर गर्ग रेखा घूमती है उस से विरुद्ध दिशा से फल उत्पन्न हुआ है । यदि घूमने के बदले गर्ग रेखा ही आगे पीछे चले तो (वा) = ० इस से सिद्ध होता है कि व विन्दु से दो तुल्य फन्दे के ऐसे वक्र होंगे जिन में एक धनात्मक दूसरा इस से उलटा ऋणात्मक होगा ।

१३८। जिन वक्रों में भुज का कौन फल कोटि है इस का ज्ञान न हो वा $\int$ र ताय इस के मान का ठीक ठीक पता न लगे वहाँ स्वल्पान्तर से भुज का अनेक समान खण्ड कर प्रति भागों पर लम्ब खड़ा करने से अनेक पास पास में दो दो कोटि और तदन्तर्गत भुजखण्ड और वक्र की पूर्णज्या से समलम्ब चतुर्भुज वनाकर पृथक् पृथक् फल साधन कर सब का योग करो तो वक्रक्षेत्र का आसन्न फल होगा । (५)वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि भुज का जितनाही अधिक विभाग करोगे उतनाही सूक्ष्म फल होगा ।

(१) कल्पना करो कि भुज का न खण्ड जो समान कर डाला उसका मान = च और कोटियों का मान $र_0, र_1, र_2, र_3, \cdots\cdots र_न$,

तो स्पष्ट है कि जितने समलम्बचतुर्भुज होंगे सभों में आद्यन्त कोटियों को छोड़ और सब कोटियाँ एक वार आधार दूसरे वार मुख होंगी और लम्ब सर्वत्र च यही रहेगा ।

इस लिये $र_0$, $र_न$ दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर, और वक्र का चाप इन से वने क्षेत्र का आसन्न फल $= च\left\{\frac{र_0+र_न}{2}+र_1+र_2+र_3+\cdots र_{न-1}\right\}$ यह होगा ।

इस पर से यह फल जानने के लिये क्रिया उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि के योगार्द्ध में और वीचवाली सब कोटियों को जोड़ दो योग को भुजखण्ड च से गुणदेने से वक्र का स्वल्पान्तर से फल होगा ।

(२) कल्पना करो कि एक ऐसा परवलय है जिसका मूलविन्दु $र_1$ कोटि का मूल, और समीकरण $र = अ + कय + गय^2$ यह है और यह, वक्र

के $र_०$, $र_१$, $र_२$,कोट्यग्र पर होके जाता है तो $र_० = अ - कच + गच^२$, $र_१ = अ$, $र_२ = अ + कच + गच^२$

और पहली और तीसरी कोटि के बीच फल $= \int_{-च}^{च} (अ + कय + गय^२) ताय$

$= २ च \left(अ + ग \frac{च^२}{३} \right)$

परन्तु $र_० + र_२ = २र_१ + २गच^२$ इस लिये

$$फल = \frac{च}{३} \{ र_० + ४र_१ + र_२ \}$$

अब समझो कि न का मान सम है अर्थात् $र_०$, $र_न$ कोटि के वीच भुजान्तर का सम विभाग किया है तो ऊपर की युक्ति से तीन तीन कोट्यग्र पर गये हुए परवलयों के फल

$\frac{च}{३} \{ र_२ + ४र_३ + र_४ \}$, $\frac{च}{३} \{ र_४ + ४र_५ + र_६ \}$, $\frac{च}{३} \{ र_६ + ४र_७ + र_८ \}$ ···इत्यादि होंगे

इस लिये इन सब फलों का योग

$\frac{च}{३} \{ र_० + र_न + ४(र_१ + र_३ + र_५ + \cdot\cdot) + २(र_२ + र_४ + र_६ + \cdot\cdot) \}$

यह स्वल्पान्तर से वक्र का फल हुआ।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि $र_०$, $र_न$ के वीच य अक्ष का समान भाग कर कोटियों का मान जानलो फिर आद्यन्त कोटियों के योग में चौगुना अवशिष्ट विषम कोटियों का योग और दूना बाकी कोटियों का योग मिला कर तीन से भाग देदो लब्धि को च से अर्थात् दो कोटियों के वीच के अन्तर से गुण दो तो गुणनफल स्वल्पान्तर से वक्र का फल होगा।

इस रीति को सिम्पशन ने सन् १७४३ में निकाला है इसी लिये इसे सिम्पशन की रीति (Simpson's Rule) कहते हैं (See Simpson's mathematical Dissertations 1743, page 109)

इस के लिये एक उदाहरण दिखाते हैं। कल्पना करो कि जिस वक्र का $र = \frac{१}{१ + य^२}$ यह समीकरण है उस का फल सिम्पशन की रीति से जानना है $र_० = १$, $र_न = \frac{१}{२}$ इस के बीच में।

यहाँ $र_० = १$ तब $य = ०$, और $र_न = \frac{१}{२}$, तब $य = १$, मानो कि $न = १०$ इस लिये $च = \frac{१}{१०} = \cdot १$, और

$र_१ = \frac{१}{१\cdot०१} = \cdot ९९००९९०१,\ र_२ = \frac{१}{१\cdot०४} = \cdot ९६१५३८४५$

$र_३ = \frac{१}{१\cdot०९} = \cdot ९१७४३११९, र_४ = \frac{१}{१\cdot१६} = ८६२०६८९६, र_५ = \frac{१}{१\cdot२५} = \cdot ८००००००$

$र_६ = \frac{१}{१\cdot३६} = \cdot ७३५२९४१२, र_७ = \frac{१}{१\cdot४९} = \cdot ६७११४०९४,\ र_८ = \frac{१}{१\cdot६४} = \cdot ६०९७५६१०$

$र_९ = \frac{१}{१\cdot८१} = \cdot ५५२४८६१९,\ र_{१०} = \frac{१}{१+१} = \cdot ५००००००$

$$
\begin{array}{rr}
 & १\cdot०००००००० \\
 & \underline{\cdot ५००००००} \\
\text{इस लिये } र_० + र_न = & १\cdot ५००००००० \\
र_१ = & \cdot ९९००९९०१ \\
र_३ = & \cdot ९१७४३११९ \\
र_५ = & \cdot ८००००००० \\
र_७ = & \cdot ६७११४०९४ \\
र_९ = & \underline{\cdot ५५२४८६१९} \\
\text{सब का योग } = & ३\cdot ९३११५७३३ \\
 & ४ \\
४(र_१ + र_३ + र_५ + \cdots) = & १५\cdot ७२४६२९३२ \\
र_२ = & \cdot ९६१५३८४५ \\
र_४ = & \cdot ८६२०६८९६ \\
र_६ = & \cdot ७३५२९४१२ \\
र_८ = & \underline{\cdot ६०९७५६१०} \\
 & ३\cdot १६८६४९१८ \\
 & \underline{२}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
६\cdot ३३७२९८३६ & = २(र_२ + र_४ + र_६ + र_८) \\
१५\cdot ७२४६२९३२ & = ४(र_१ + र_३ + र_५ + र_७ + र_९) \\
\underline{१\cdot ५००००००००} & = र_० + र_{१०}
\end{array}
$$

$$\text{यो} = २३\cdot ५६१९२७६८$$

$$= र_० + र_{१०} + ४(र_१ + र_३ + र_५ + र_७ + र_९) + २(र_२ + र_४ + र_६ + र_८)$$

फल $= \frac{\text{च} \times \text{यो}}{३.} = \cdot ७८५३९७५८९$ इस में यदि ६ स्थान तक ग्रहण करें तो $\cdot ७८५३९८$ यह मान होगा

परन्तु $\frac{१}{१+\text{य}^{२}} = \text{र}$ इस वक्र का य के ० और १ के बीच मान में चलानयन की रीति से ठीक फल $\int_{०}^{१} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^{२}} = \frac{\pi}{४} = \frac{३\cdot१४१५९२६५\cdots}{४} = \cdot ७८५३९८ \cdots$ यह हुआ इस लिये यदि यहाँ भी दशमलव का मान ६ स्थान तक लें तो सिम्पशन की रीति से बहुत ही ठीक ठीक फल आया यह प्रत्यक्ष देखने में आता है।

(३) प्रत्येक दो कोटियों के बीच में जो भुजान्तर च माना है उसे २ ज के तुल्य मानें और कल्पना करें कि एक प्रकार के परवलय का $\text{र} = \text{अ} + \text{कय} + \text{गय}^{२} + \text{घय}^{३}$ यह समीकरण है जो कि $\text{र}_{०}$, $\text{र}_{१}$, $\text{र}_{२}$, $\text{र}_{३}$ इन चार कोट्यग्र पर होकर जाता है और जिसका मूलविन्दु य अक्ष में $\text{र}_{१}$, $\text{र}_{२}$ कोटियों के बीच में है तो

$$\text{र}_{०} = \text{अ} - ३\,\text{कज} + ९\,\text{गज}^{२} - २७\,\text{घज}^{३}$$
$$\text{र}_{१} = \text{अ} - \text{कज} + \text{गज}^{२} - \text{घज}^{३}$$
$$\text{र}_{२} = \text{अ} + \text{कज} + \text{गज}^{२} + \text{घज}^{३}$$
$$\text{र}_{३} = \text{अ} + ३\,\text{कज} + ९\,\text{गज}^{२} + २७\,\text{घज}^{३}$$

इस लिये $\text{र}_{०} + \text{र}_{३} = २(\text{अ} + ९\,\text{गज}^{२})$, $\text{र}_{१} + \text{र}_{२} = २\,(\text{अ} + \text{गज}^{२})$

$$\therefore \text{अ} + ९\,\text{गज}^{२} = \frac{\text{र}_{०} + \text{र}_{३}}{२} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

$$\text{अ} + \text{गज}^{२} = \frac{\text{र}_{१} + \text{र}_{२}}{२} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

$\text{अ} + ५\text{गज}^{२} = \frac{\text{र}_{०} + \text{र}_{३} + \text{र}_{१} + \text{र}_{२}}{४}$। (१) और (२) को जोड़कर २का भाग देने से

$$\text{इस लिये}\quad २\text{अ} + ६\text{गज}^{२} = \frac{\text{र}_{०} + \text{र}_{३} + ३\text{र}_{१} + ३\text{र}_{२}}{४} \quad \cdots\cdots \quad (३)$$

परंतु परवलयका $\text{र}_{०}\text{र}_{३}$ कोटिसीमा से फल $= \int_{-३\text{ज}}^{३\text{ज}} (\text{अ} + \text{कय} + \text{गय}^{२} + \text{घय}^{३})\text{ताय}$

$= ३\text{ज}(२\text{अ} + ६\text{गज}^{२}) = \frac{३\text{ज}}{४}\{\text{र}_{०} + \text{र}_{३} + ३(\text{र}_{१} + \text{र}_{२})\}$, ज के स्थान में $\frac{\text{च}}{२}$ का उत्थापन देने से फल $= \frac{३\text{च}}{८}\{\text{र}_{०} + \text{र}_{३} + ३(\text{र}_{१} + \text{र}_{२})\}$

इसी तरह $\text{र}_{३}, \text{र}_{४}, \text{र}_{५}, \text{र}_{६}$ के अग्र पर गये परवलय का $\text{र}_{३}$, $\text{र}_{६}$ कोटि के बीच

में फल $\frac{3च}{8}\{र_3 + र_6 + 3(र_4 + र_5)\}$ इसी तरह चार चार कोट्यग्र पर गये हुए परवलयों के फल, $\frac{3च}{8}\{र_6 + र_9 + 3(र_7 + र_8)\}$, $\frac{3च}{8}\{र_9 + र_{12} + 3(र_{10} + र_{11})\}$ इत्यादि होंगे। यदि अभीष्ट वक्र के फल को इन परवलयों के फल योग तुल्य स्वल्पान्तर से मान लो तो वक्र का फल $= \frac{3च}{8}\{र_0 + र_न + 2(र_3 + र_6 + र_9 + र_{12} + \cdots) + 3(र_1 + र_2 + र_4 + र_5 + \cdots)\}$ यह हुआ। इस पर से यह रीति उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि योग में $र_0$ के आगे तीसरी तीसरी कोटियों का दूना योग और बाकी कोटियों का तिगुना योग मिला दो। योग को च के $\frac{3}{8}$ से गुण देने से वक्र का फल हो जायगा।

इस को भी सिम्पशन की रीति कहते हैं परन्तु वास्तव में यह न्यूटन का निकाला हुआ है (See Opusula, method. Diff., Prop. 6 Scolium) ऊपर की रीतियों में कोटि की संख्या ज्यों ज्यों बढ़ाते जायंगे त्यों त्यों फल सूक्ष्म आवेगा।

१३९। किसी वक्र में सिद्ध है कि य = श्रु कोज्याप, र = श्रु ज्याप इस लिये स्पप $= \frac{र}{य}$ और तास्पप $= \frac{ताप}{कोज्या^2 प} = \frac{यतार - रताय}{य^2}$।

इस लिये $श्रु^2 ताप = यतार - ताय$

और $\frac{1}{2}\int श्रु^2 ताप = \frac{1}{2}\int (यतार - रताय)$

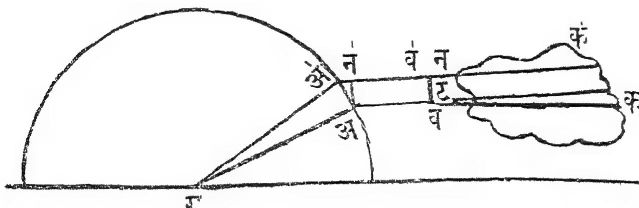
इस पर से सिद्ध होता है कि $\frac{1}{2}\int श्रु^2 ताप$ इस के स्थान में

$\frac{1}{2}\int (यतार - रताय)$ इस को लेकर भी उचित सीमाओं के भीतर फल साधन कर सकते हैं।

१४०। वक्र रेखा से घिरे हुए किसी क्षेत्र के फल जानने के लिये बुद्धिमानों ने यान्त्रिक विद्या के बल से यन्त्र बनाये हुए हैं इस यन्त्र को धरातलमापक (Planimeters) कहते हैं यह कई प्रकार के हैं उन में प्रोफेसर आमस्टलर (Porfessor Amstler of Schaffhausen) का सब से सहज और उत्तम है। इस में दो भुज ऐसे जुटे हुए हैं कि स्वतन्त्र एक धरातल में घुस सकते हैं। एक भुज के अग्र पर एक बिन्दु स्थिर बनी हुई है जिस के चारो ओर यन्त्र फिरा

करता है इस लिये इस विन्दु को यन्त्र का केन्द्र कहते हैं। इस यन्त्र में एक पहिये के ऐसा चक्र भी लगा हुआ है जो दूसरे भुज में सटा हुआ इस भुज पर लम्बरूप फिरा करता है और उन वक्रों के क्षेत्रफल के मान भी इस में अङ्कित हैं जो कि दूसरे भुज किसी विन्दु के चलने से उत्पन्न होते हैं। इस चक्र की रचना से स्पष्ट है कि यह दूसरे भुज पर जो लम्ब है उसके गमनमान को केवल वताता है जिस के ज्ञान से वक्र का फल भी जान सकते हैं।

जिस वक्र का फल जानना हो उस की परिधि के एक विन्दु पर दूसरे भुज का क अग्र रक्खो फिर इस में लगे हुए चक्र को जो कि पहले दोनों भुजों के सम्पात विन्दु अ पर था क की ओर घसकाते और आगे वढ़ाते जाओ जिस में इस के साथ साथ गअ और अक भुज ऐसा घूमें कि क विन्दु अभीष्टवक्र की परिधि पर ही सर्वदा रहे इस प्रकार से जव वक्र के सव परिधि पर क विन्दु घूम कर फिर अपने पहले स्थान पर आवे उस समय चक्राङ्कित संख्या जो सामने में हो वही वक्र का फल समझना।



इस में पहले यह दिखलाते हैं कि सर्वदा अ विन्दु पर चक्र के स्थिर रहने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही चाहे अक में चक्र जहाँ रहे सर्वत्र होगा।

कल्पना करो कि चक्र का केन्द्र व विन्दु पर पहुँचा और जव अक की क विन्दु चल कर वहुत ही पास के क' विन्दु पर पहुँची उस समय यन्त्र के भुज गअ', अ'क' रूप हुए और तब चक्र का केन्द्र व' विन्दु पर पहुँचा।. अक, अ'क' को वहुत ही पास पास समझो, अ और व विन्दु से अ'क' रेखा पर अन', वन लम्ब और अ विन्दु से अ'क' के समानान्तर अट रेखा खींचो तो अक, अ'क' के अत्यन्त पास होने के कारण अन' = ताचा = अ स्थान से लम्ब की गति, ∠वअट = ताप, और वन = ताचा' = व स्थान से लम्ब की गति, अव = ग, इस लिये

वन = ताचा' = वट + टन = ताचा + गताप

अब, जब क वक्र की परिधि में घूमते घूमते फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचे गा उस समय ताप$_1$ के जितने मान होंगे सब का योग धन ऋण के तुल्य होने से शून्य हो जायगा क्योंकि अक रेखा का एक ओर जितने झुकाव से चलना होगा फिर उतने ही झुकाव से विरुद्ध दिशा में चलना होगा। इस लिये वक्र के चारो ओर घूमने में यौ ताचा$'$ = यौ ताचा अर्थात् अ विन्दु पर चक्र के केन्द्र को स्थिर रखने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही अक रेखा में कहीं केन्द्र रहने से होगा।

अब कल्पना करो कि यन्त्र के केन्द्र अर्थात् प्रथम भुज के ग विन्दुगत लम्बरूप अक्ष युग्म के अभिप्राय से क के भुज = य, कोटि = र हैं, और अग = अ, अक = क, ∠ अगय = प, और कल्पना करो कि अक रेखा बढ़ाने से य अक्ष से प$_1$ कोण बनाती है तो सरलत्रिकोणमिति से

य = अकोज्याप + ककोज्याप$_1$, र = अज्याप + कज्याप$_1$

इस लिये ताय = —अज्यापताप—कज्याप$_1$ताप$_1$,

तार = अकोज्यापताप + ककोज्याप$_1$ताप$_1$

और यतार = अ^{2}कोज्या^{2}पताप + अककोज्यापकोज्याप$_1$ताप$_1$

+ अककोज्यापकोज्याप$_1$ताप + क^{2}कोज्या^{2}प$_1$ताप$_1$

रताय = —अ^{2}ज्या^{2}पताप—अकज्यापज्याप$_1$ताप$_1$

—अकज्यापज्याप$_1$ ताप—क^{2}ज्या^{2}प$_1$ताप$_1$

इस लिये यतार—रताय = अ^{2}ताप + अककोज्या(प—प$_1$)ताप$_1$

+ अककोज्या(प—प$_1$)ताप + क^{2}ताप$_1$

= अ^{2}ताप + अककोज्या(प—प$_1$)ता(प + प$_1$) + क^{2}ताप$_1$

और ताचा = अन$'$ = अअ$'$ज्याअअ$'$न = अतापकोज्या(प—प$_1$)

परन्तु प + प$_1$ = २प—(प—प$_1$)

इस लिये अककोज्या(प—प$_1$)ता(प + प$_1$)

= २अककोज्या(प—प$_1$)ताप—अककोज्या(प—प$_1$)ता(प—प$_1$)

= २कताचा—अककोज्या(प—प$_1$)ता(प—प$_1$)

इस के उत्थापन से

यतार—रताय = अ^{2}ताप + क^{2}ताप$_1$

+ २कताचा—अककोज्या(प—प$_1$)ता(प—प$_1$)

परन्तु १३२वें प्रक्रम से क विन्दु के भ्रमण से उत्पन्न निर्दिष्ट वक्र का फल $= \frac{1}{2}\int$(यताऱ—रताय) यह होगा।

अब निर्दिष्ट वक्र के परिधि पर क विन्दु के पूरा भ्रमण करने में कुछ आगे पीछे घसकते घसकते अक, अग फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचेंगे इस लिये ऊपर की युक्ति से $\int$अ^{2}ताग, $\int$क^{2}ताग$_1$,

$\int$अककोज्या(प—प$_1$) ता(प—ग$_1$) ये शून्य के तुल्य हो जायँगे इस लिये वक्र का पूरा फल $= \frac{1}{2}\int$(यताऱ—रताय) = क$\int$ताचा = कचा

जहाँ चा लम्ब के गमन का प्रमाण है जो कि चक्र स्वयं बताता है। इस लिये चक्र में पहले ही से लम्ब के गमन के प्रमाण को क गुना कर अङ्कन कर डालें तो जो उस समय चक्र में अङ्कन की संख्या होगी वही वक्र का समग्र फल होगा।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। समातिपरवलय में जिसका य^2—र^2 = १ यह समीकरण है

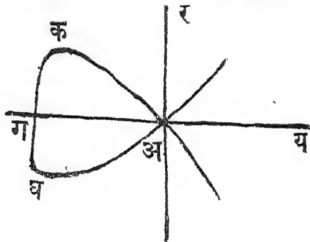
यदि केन्द्राभिप्राय से भुज, श्रुति, वक्र का चाप, इन से उत्पन्न वक्रत्रिभुज का फल = स हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{य} = \frac{\text{इ}^{\text{स}} + \text{इ}^{-\text{स}}}{2} \text{ और } \text{र} = \frac{\text{इ}^{\text{स}} - \text{इ}^{-\text{स}}}{2}$$

२। जिस वक्र का अ^{2}र^2 = य^3 (२ अ–य) यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० πअ^2

३। जिस वक्र का य^3 = र^2 (अ—य) यह समीकरण है उसके चाप और असीमपथ और य अक्ष से बने क्षेत्र का फल बताओ। उ० $\frac{3}{2}\pi$ अ^2

४। जिस वक्र का अ^{2}र^2 = य^4 (क + य) यह समीकरण है उसकी आकृति नीचे लिखी हुई है इसमें अ क ग घ अ फन्दे का फल बताओ।



उ० $\frac{८\text{क}^{\frac{7}{2}}}{३\cdot५\cdot७\text{अ}^{\frac{3}{2}}}$

५। 

इस वक्र में अक = अ,

अग = क और इस का समीकरण ग $र^2 = (य—अ)(य—क)^2$ यह है । ग क के बीच जो फन्दा है उस का फल बताओ । उ० $\frac{८(क—अ)^{\frac{5}{2}}}{३.५ग^{\frac{1}{2}}}$

६। $य र^2 = ४ अ^2 (२ अ—य)$ यह एक विटचरी (Witch) का समीकरण है इसके और स्पर्शीमपथ के बीच क्षेत्र का फल बताओ ।

उ० $४ \pi अ^2$

७। जिस दीर्घवृत्त का $\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} = १$ यह समीकरण है उसके अवलूत का सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० $\frac{३\pi(अ^2—क^2)^2}{८ अ क}$

८। सिद्ध करो कि जिसका अक्षीय समीकरण श्रुप = अ यह है उसके कोई दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्रों के फलों में वही सम्बन्ध होगा जो उस काल की दो दो श्रुतियों के अन्तर में होगा ।

९। $य^3 + र^3 = ३ अ य र$ इस समीकरण के वक्र में जो एक फन्दा होगा उसका क्या फल होगा । यहाँ अक्षीय समीकरण बनावो तो

$श्रु = \frac{३ अ कोज्याप ज्याप}{ज्या^3प + कोज्या^3प}$ ऐसा होगा फिर

$फल = \frac{९ अ^2}{२} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ज्या^2पकोज्या^2प}{(ज्या^3प + कोज्या^3प)^2} ताप$

इसके जानने के लिये मानो कि स्पप = च तो

$इस का रूप \frac{९ अ^2}{२} \int_0^{\infty} \frac{च^2 ता च}{(१ + च^3)^2} = \frac{३अ^2}{२}$

१०। सिद्ध करो कि जिस वक्र का $र (य^2 + अ^2) = ग^2 (अ—य)$ यह समीकरण है उसका फल य = ० से य = अ तक $ग^2(\frac{\pi}{४} — \frac{१}{२} ला २)$ यह है ।

११। $र^2 = \frac{य^2(अ + य)}{अ—य}$ इस समीकरण के वक्र में जो फन्दा होगा उसका फल क्या होगा । उ० $२ अ^2(१— \frac{\pi}{४})$

१२। $श्रु^2 कोज्याप = अ^2 ज्या३प$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो । उ० $\frac{३अ^2}{४} - \frac{अ^2}{२} ला२$

१३। यदि वक्र में श्रु = (कोज्या २ प + ज्या २ प) तो सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $\pi अ^२$

१४। जिस वक्र का $(य^२ + र^२)^३ = ४\frac{अ^२}{क^२} य^२ र^२$ यह समीकरण है उसके एक फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{\pi अ^२}{८ क^२}$

१५। जहाँ $(य^२ + र^२)^२ = ४अ^२य^२ + ४क^२ र^२$ ऐसा समीकरण है उस वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $२\pi(अ^२ + क^२)$

१६। जिस वक्र का $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = \frac{१}{ग^२}\left[\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२}\right]^२$ यह समीकरण है उस का फल सम्पूर्ण क्या होगा उ० $\frac{\pi ग^२}{२अक}(अ^२ + क^२)$

(१३०) प्रक्रम का ३ उदाहरण देखो)

१७। जहाँ श्रु कोज्या ष = अ कोज्या २ प उस वक्रके फन्दे का फल बतावो उ० $(२ - \frac{\pi}{२})अ^२$

१८। यदि $अ > क$ तो $श्रु = \frac{अ^२}{\sqrt{(अ^२ - क^२ को.ज्या^२ ष)}}$ + क कोज्या प इस समीकरण के वक्र का क्या फल होगा। उ० $\frac{\pi अ^२}{\sqrt{(अ^२ - क^२)}} + \frac{\pi क^२}{२}$

१९। दो श्रुति और कर्णच्छेद (Conchoid) के चाप में बने क्षेत्र के फल का मान बतावो। जहाँ कर्णच्छेद का श्रु = अ + क कोछेप यह समीकरण है।

२०। दीर्घवृत्त के केन्द्र से दो श्रुति जो दीर्घवृत्त के परिधिस्थ दो विन्दुओं तक खींची गई हैं उन से और दीर्घवृत्त के चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो।

२१। परवलय का चाप और शिरःस्थान से दो श्रुति इन से बने क्षेत्र का फल कैसा होगा।

२२। यदि वक्र का समीकरण श्रु = अ(छेष + स्पष) और इस के असीमपथ का समीकरण श्रु कोज्याष = २ अ यह हो तो वक्र और असीमपथ के भीतर का क्षेत्रफल क्या होगा।

२४। सिद्ध करो कि श्रु = अ (१ + २ कोज्याप) इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल $अ^२\left[२\pi + \frac{३\sqrt{३}}{२}\right]$ यह और इस के भीतरी फन्दे का फल

अ^2 $\left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ यह होगा।

२५। लागुरिक्थिक सर्पिल में दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो।

२६। यदि वक्र की श्रुति श्रु, मूलविन्दु से किसी स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल और इस लम्ब और नियत रेखा से उत्पन्न कोण = प, और सीमितवक्र का सम्पूर्ण फल स और इस के सीमित पाददल का सम्पूर्ण फल स$_1$ हो तो सिद्ध करो कि २ स$_1$ = स + $\frac{1}{2}\int$ श्रु^{2} ताप जहाँ वक्र और पाददल का एक ही मूलविन्दु है।

२७। सिद्ध करो कि पाददल का मूल स्थान दीर्घवृत्त के भीतर ही दीर्घवृत्त के केन्द्र से ग दूरी पर है उसका सम्पूर्ण फल = $\int$ (अ^2 + क^2 + ग^2) यह होगा।

२८। श्रु = अकोज्यानप + कज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{\pi}{न}$ (अ^2 + क^2)

२९। श्रु^{2} = अ^{2}कोज्यानप + क^{2}ज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{\sqrt{(अ^4 + क^4)}}{न}$

३०। अर^4 = य^4(अ^2—य^2) इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $\frac{८अ^2}{५}$

३१। श्र = अकोज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{\pi अ^2}{न}$

३२। श्रु = अज्यानप इस समीकरण के वक्र में सब फन्दों का फल बतावो।

$$\text{उ फल} = \begin{cases} \frac{\pi अ^2}{४} & \text{यदि न विषम} \\ \frac{\pi अ^2}{२} & \text{यदि न सम} \end{cases}$$

३३। दीर्घवृत्त के एक नाभि से जितनी श्रुतियाँ हैं उन्हें अपनी सीध में बढ़ा

कर ग तुल्य काट उन पर एक वक्र रेखा कर दिया। इस से और दीर्घवृत्त की परिधि से उत्पन्न जो क्षेत्र हुआ उसका फल बतावो।

उत्तर πग (२क + ग)

जहाँ क = दीर्घवृत्त का लघुव्यासार्द्ध।

३४। $श्रु^{म} = अ^{म}$ कोज्यामथ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल यदि आ और वक्र के मूलविन्दु ही इस के पाददल की मूलविन्दु जहाँ है वैसे पाददल का सम्पूर्ण फल $आ_{१}$ तो सिद्ध करो कि

$$आ_{१} = आ\left(१ + \frac{म}{२}\right)$$

३५। नाभि से जो परवलय में दो श्रुतियाँ हों उन से और परवलय के चाप से जो क्षेत्र बना उसका फल सिद्ध करो कि।

$$\frac{अ^{\frac{१}{२}}}{३}\left\{\left(\frac{श्रु + श्रु' + ग}{२}\right)^{\frac{३}{२}} - \left(\frac{श्रु + श्रु' - ग}{२}\right)^{\frac{३}{२}}\right\}$$

जहाँ परवलय की कोटि $र = \sqrt{४ अ य}$ और परवलय के चाप की पूर्णज्या ग है।

३६। दीर्घवृत्त के केन्द्र न से वृहद्व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनाया गया उसको सहायक वृत्त कहो और न को नाभि। दीर्घवृत्त की परिधि में ब विन्दु लेकर इस के कोटि को अपनी सूध में बढ़ा कर मानो कि सहायक वृत्त की परिधि में प विन्दु पर लगी, और दीर्घवृत्त के व्यासार्द्धाग्र अ अक्ष में अ विन्दु पर मानो तो यदि $\angle$ अ न प = ज तो सिद्ध करो कि अनाब दीर्घवृत्तखण्ड का फल = $\frac{अक}{२}$ (ज — इज्याज) यह होगा।

जहाँ अ, क वृहल्लघुव्यासार्द्ध हैं।

३७। $४अ^{४}र^{२} = क^{२}य^{२}(अ^{२} - २अय)$ इस समीकरण के वक्र में फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{अ.क}{१५}$

३८। जिन दो वक्रों के $र^{२} - ४अय = ०$, $य^{२} - ४अर = ०$ ये समीकरण हैं उनके चापों से बने क्षेत्र का फल बतावो। उ० $\frac{१६ अ^{२}}{३}$

३९। जिस वक्र का र = ग ज्या $\frac{य}{अ}$ ला ज्या $\frac{य}{अ}$ यह समीकरण है उसका फल ० से लेकर $अ\pi$ तक य के मान में क्या होगा। उ० २अग (१ − ला२)

४०। जिस दीर्घवृत्त का $अय^2 + २कयर + गर^2 = १$ यह समीकरण है उसका फल क्या होगा। उ० $\frac{\pi}{\sqrt{(अग - क^2)}}$

(११६ प्रक्रम का अन्तिम वाक्य देखो)

४१। जिस दीर्घवृत्त का $अय^2 + २कयर + गर^2 + २घय + २चर + फ = ०$ यह समीकरण है उसका क्षेत्रफल क्या होगा।

$$उ० \quad \frac{\pi\,(अच^2 + गघ^2 + फक^2 - २\,चजक - अगफ)}{(अग - क^2)^{\frac{3}{२}}}$$

४२। जिस वक्र का $४\,र^2(अ^2 + य^2) - ८अर(अ^2 - य^2) + २\,(अ^2 - य^2)^2 = ०$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $अ^2\pi \left\{ ४ - \frac{५\sqrt{२}}{२} \right\}$

४३। केन्द्र से दीर्घवृत्त की कोटियों पर बने अर्द्धवृत्त पर स्पर्शरेखा कर देने से स्पर्श विन्दुओं पर जानेवाला जो वक्र हो उसका फल क्या होगा।

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} = १$ यह है

उ० वक्र का अक्षीय समीकरण दीर्घवृत्त के केन्द्र को

$$ध्रवस्थान\ मान\ श्रु^2 = \frac{अ^2क^2}{क^2 + ४अ^2 स्प^2\frac{प}{२}}$$

$$और \qquad फल = \frac{\pi(अ^2 \times क)}{२(२अ + क)}$$

४४। जिस परवलय का $र^2 = ४अय$ यह समीकरण है उसके भीतर स्थिर (२ ग) पूर्णज्या घूमती है। उसके दोनों प्रान्तों पर परवलय में जो दो स्पर्शरेखा हैं उनके योगविन्दु के गमन से जो वक्र होगा उसके और परवलय के भीतर समग्र फल क्या होगा। उ० $\frac{ग^2\pi}{२}$

(परवलय के तिर्यक्भुजकोटि का समीकरण देखो)

४५। एक लड़के ने सात हाथ डंडे के दोनों शिरों को एक दीर्घवृत्त की परिधि पर रखकर चारो ओर घुमाने लगा। उस डंडे के वीच में नीचे एक लोहे की नोखदार कील लगी थी। इसके कारण डंडे के चारों ओर घूम जाने से दीर्घवृत्त के भीतर एक नया वक्र वन गया। लड़के ने हँसकर अपने गुरु से जो कि उसे हिसाब पढ़ाता था पूछा कि गुरुजी दीर्घवृत्त और नये वक्र के भीतर एक

वर्गहस्त पत्थर की कितनी पटिया फर्श के लिये लगेंगी। वताओ गुरु ने क्या उत्तर दिया। यहाँ बृहद्व्यास १४ हाथ का समझो।

यदि व्यास परिधि का सम्वन्ध $\frac{२२}{७}$ मानो तो पत्थर के पटिये की

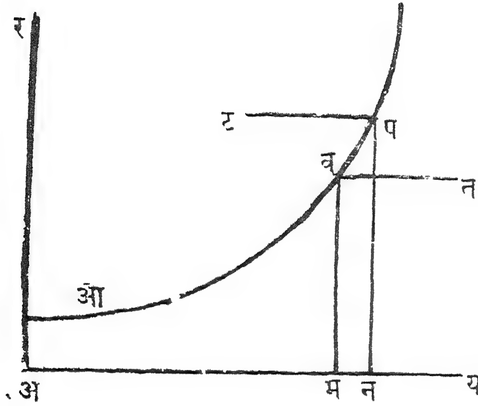
संख्या ३८$\frac{१}{२}$

इति सप्तमाध्याय।

अथ अष्टमाध्याय।

वक्र के पृष्ठफल और घनफल का आनयन।

१४१। कल्पना करो कि अर, अय लम्बरूप अक्ष, आ स्थिरविन्दु चा = आव, व विन्दु का भु = य, को = र है। व के पास प एक और विन्दु लो और आवप वक्र को अ य अक्ष के चारो ओर घुमा दो तो एक घनक्षेत्र वन जायगा जिसके आव चाप के घूमने से जो पृष्ठफल होगा उसके गति का



सम्बन्ध चाप के गति के वश से $\frac{\text{ता पृ}}{\text{ताचा}}$ = २πर (चलनकलन का १६० वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये $\text{पृ} = \int 2\pi\text{र ता चा}$ . . . . . . (१)

इसी तरह से $\text{पृ} = \int 2\pi\text{र} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$ . . . . . . (२)

$\text{पृ} = \int 2\pi\text{र} \frac{\text{ताच}}{\text{तार}} \text{तार}$ . . . . . . (३)

$\text{पृ} = \int 2\text{ र ता चा} = \int 2\pi \text{ र} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताप} = \int 2\pi\text{श्रुज्या प} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताप}$ (४)

$$\text{जहाँ } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{\left\{\text{श्रु}^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^2\right\}}$$

किसी स्थान में पृष्ठफल के लिये इन चारो समीकरणों में से गणितलाघव समझ कर एक को चुन सकते हो। जहाँ सहज में र, चाप के फल रूप में आ सके वहाँ (१) पहले को जहाँ $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}}$ सहज में र के फलरूप में आ सके वहाँ (३) को और जहाँ अक्षीयसमीकरण मालूम हों वहाँ (४) को ले सकते हो। प्रायः (२) बहुत ही कामका है क्योंकि वक्र के समीकरण से र और

$\frac{ताच}{ताय}$ दोनों प्रायः सहज में य के फलरूप में आजाते हैं इस लिये इसी को बहुधा लोग लेते हैं।

प्रत्येक समीकरणों से उचित सीमा के भीतर चाप से बने पृष्ठ का फल मालूम हो जायगा।

१४२। अ य अक्ष से अ दूरी पर अ य के समानान्तर अ य के चारो ओर यदि एक अपरिमित रेखा घूमे तो स्पष्ट है कि समतलमस्तकरूप एक शङ्कु बन जायगा इस लिये $य_२, य_१$ भुज के भीतर इस शङ्कु का पृष्ठ-फल (२) समीकरण लेने से ($र = अ, \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^२} = १$)

$$\int_{य_१}^{य_२} २\pi \text{ अ ताय} = २\pi \text{ अ } (य_२ — य_१) \text{ यह होगा।}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि इस शङ्कु के आधार परिधि को ऊँचाई के अन्तर से गुण देने से दोनों उचाइयों के भीतर का पृष्ठफल हो जायगा।

१४३। अ विन्दु पर अ य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाने वाली रेखा यदि अ य के चारो ओर घूमे तो स्पष्ट है कि समसूची का पृष्ठ उत्पन्न हो जायगा जहाँ किसी विन्दु का भु = य और को = र = य स्प अ

इस लिये $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^२\right\}} = \sqrt{(१ + स्प^२ अ)} = छे \text{ अ}$।

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = २\pi \int स्प \text{ अ छे अ य ताय} = \pi \text{ स्प अ छे अ } य^२ + स्थि$$

और $य_२, य_१$ के भीतर पृष्ठफल = π स्प अ छे अ $(य_२^२ — य_१^२)$ यही पृष्ठफल उस घनक्षेत्र का भी होगा जिसे भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में वापी क्षेत्र कहा है।

इस में यदि $य_१ = ०$ और मूलस्थान से $य_२$ दूरी पर अ य अक्ष पर लम्बरूप धरातल से सूचीपृष्ठसूत्रों को काटें तो कटे हुए परिधि का व्यासार्द्ध = त्रि = $य_२$ स्पअ इसलिये समसूच्याकारशङ्कु का पृष्ठफल = πकोछेअत्रि^{२} इसी में यदि परिधि = प = २π त्रि और सूची का पृष्ठसूत्र = पृ सू = को छे अ त्रि तो पृष्ठफल = $\frac{प \times पृसू}{२}$। इस का साधन हमने अपने चलनकलनके १५९वें प्रक्रम में केवल क्षेत्रयुक्ति ही से किया है।

१४४। गोल के पृष्ठफल का आनयन।

कल्पना करो कि वृत्त का समीकरण $र^2 = अ^2 — य^2$ यह है और यह वृत्त य अक्ष के चारो ओर घूमकर एक गोल को बनाया है तो $\frac{तार}{ताय} = -\frac{य}{र}$

और $\frac{ताच}{ताय} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left(१ + \left[\frac{य^2}{र^2}\right]\right)} = \frac{अ}{र}$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = २\pi \int र \frac{अ}{र} ताय = २\pi अ \int ताय = २\pi अ य + स्थि$$

कल्पना करो कि मूलविन्दु से $य_1$, $य_2$ दूरी पर य अक्ष पर लम्बरूप जो दो धरातल हैं उन से गोल को काटा तो कटे हुए खण्ड का पृष्ठफल $= २\pi अ (य_2 — य_1) = प (य_2 — य_1)$, (यदि प = गोल की परिधि।) इस पर से सिद्ध होता है कि कटे खण्ड का पृष्ठफल $य_2 — य_1$ इसके अर्थात् उसके उँचाई के वश से घटता वढ़ता है अर्थात् खण्डों की उँचाइयों में जो सम्वन्ध है वही उनके पृष्ठफल में सम्वन्ध होता है।

यहाँ यदि $य = अ$ और $य_2 = -अ$ तो गोल का समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^2$ $= ४ \times$ वृत्तफल।

अर्थात् वृत्त के फल को चार गुना कर देने से वृत्त से बने गोल का पृष्ठफल होता है। भारतवर्ष में सव से पहले इस गोल के पृष्ठफल को भास्कराचार्य ने निकाला है और यद्यपि उन से इस की सच्ची उपपत्ति न हुई तथापि गोल का वहुत सा खण्ड कर और प्रत्येक खण्डों का फल साधन कर उनके योग पर से अटकर से सच्चा ही पृष्ठफल निकाला और लल्ल ने जो अशुद्ध पृष्ठफल का साधन किया था उसका खण्डन किया।

भास्कराचार्य ने अपने गोलाध्याय में यह भी दिखलाया है कि गोल के परिधि के आधे को व्यास मान एक कपड़े का वृत्त बनाया जाय और इस से यदि गोल को ढाँके तो गोल का आधे से अधिक खण्ड ढँक जाता है इस लिये कपड़े के वृत्त का जो फल उसके दूने से गोल का पृष्ठफल अल्प ही होगा और गणित से निश्चय है कि गोल के वृत्त के फल से कपड़े के वृत्त का दूना फल पांच गुना के आसन्न है इस लिये वृत्त के फल को पांच गुना करने से गुणनफल गोल के पृष्ठफल से अधिक होगा इस लिये लल्लने जो अपने गणित में लिखा है कि

(वृत्तफलं परिधिघ्नं समन्ततो भवति गोलपृष्ठफलम्) वृत्तफल को परिधि से गुण देने से पृष्ठफल होता है यह बहुत ही अशुद्ध है।

१४५। वृहद्व्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसको दीर्घगोल कहो तो इस के पृष्ठफल के आनयन के लिये कल्पना करो कि दीर्घवृत्त का समीकरण $अ^2र^2 + क^2य^2 = अ^2क^2$ यह है

तो यहाँ $\frac{तार}{ताय} = -\frac{क^2य}{अ^2र}$ और $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left[१ + \frac{क^४य^2}{अ^४र^2}\right]}$

$$= \frac{क(\sqrt{(अ^2 - इ^2य^2)})}{अर}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$पृ = \frac{२\pi क}{अ}\int \sqrt{(अ^2 - इ^2य^2)}\ ताय = \frac{२\pi कइ}{अ}\int \sqrt{(\frac{अ^2}{इ^2} - य^2)}\ ताय \quad \cdots (१)$$

$$= \frac{\pi कइ}{अ}\left\{ य\sqrt{\left[\frac{अ^2}{इ^2} - य^2\right]} + \frac{अ^2}{इ^2} ज्या_१^{-१}\frac{इय}{अ} \right\}$$

यदि ०, अ के भीतर य के मान में पृष्ठफल का साधन करें तो दीर्घगोल

का आधा पृष्ठफल $= \pi अक\left\{ \sqrt{(१ - इ^2)} + \frac{ज्या^{-१}इ}{इ} \right\}$

(दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

यदि $य_२$, $य_१$ के भीतर चलानयन करें तो (१) से

$$पृ = \frac{२\pi कइ}{अ}\int_{य_१}^{य_२} \sqrt{(\frac{अ^2}{इ^2} - य^2)}\ ताय$$

यह दिखलाता है कि जिस दीर्घवृत्त का $\frac{अ}{इ}$ बृहद्व्यासार्द्ध और क लघुव्यासार्द्ध है उसका $य_२$, $य_१$ सम्बन्धि द्विगुण कोटियों के भीतर जो खण्ड है उसे π से गुण देने से $य_२$, $य_१$ भुज सम्बन्धि अपने दीर्घवृत्त का पृष्ठफल हो जायगा।

इसी तरह यदि दीर्घवृत्त लघुव्यास के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल भुज और कोटि को बदल देने से

$$पृ = २\pi\int य\ ताचा = २\pi\int \left[अ^2 + \frac{अ^४इ^2}{क^४}र^2\right]^{\frac{१}{२}} तार$$

$$= २\pi\frac{अ^2इ}{क^2}\int \left[र^2 + \frac{क^४}{अ^2इ^2}\right] तार$$

$$= २\pi \frac{अ^2 इ}{क^2} \left\{ \frac{र}{२} \sqrt{\left(र^2 + \frac{क^4}{अ^2 इ^2}\right)} + \frac{क^4}{अ^2 इ^2} ला \left\{ र + \sqrt{\left[र^2 + \frac{क^4}{अ^2 इ^2} \right]} \right\} \right.$$

$$= \pi \frac{अर}{क^2} (अ^2 इ^2 र^2 + क^4)^{\frac{1}{२}} + \pi \frac{क^2}{इ} ला \frac{अइर + \sqrt{(अ^2 इ^2 र^2 + क^4)}}{अइ}$$

०, क के बीच में चलानयन करने से और उसको दूना कर देने से

$$समग्र\ पृष्ठफल = २\pi अ^2 + \pi \frac{क^2}{इ} ला \frac{१+इ}{१—इ}$$

यदि $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{अ^2 इ^2 र^2}{क^2} = १$ इस अतिपरवलय का $य_१$, $य_२$ के भीतर फल साधन करो तो स्पष्ट होगा कि इस फल से π गुना ऊपर के घनक्षेत्र का $य_१$,$य_२$ भुजसम्बन्धी पृष्ठफल होगा।

१४६। परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसके पृष्ठफल का आनयन।

कल्पना करो कि परवलय का समीकरण $र^2 = ४अय$ यह है तो

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{२\ अ}{र} \therefore \frac{ताचा}{तार} = \sqrt{१ + \frac{र^2}{४अ^2}}$$

$= \frac{\sqrt{(४अ^2 + र^2)}}{२अ}$ इस लिये १४१ प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$पृ = \int २\pi र \frac{ताचा}{तार} तार = \frac{\pi}{अ} \int र\sqrt{(४अ^2 + र^2)}\ तार$$

$$= \frac{\pi}{२अ} \int \sqrt{(४अ^2 + र^2)}\ २\ र\ तार = \frac{\pi}{२\ अ} \times \frac{२}{३} (४\ अ^2 + र^2)^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{\pi}{३अ} (४\ अ^2 + र^2)^{\frac{३}{२}} + स्थि$$

$$०, और\ र_१\ के\ भीतर\ पृष्ठफल = \frac{\pi}{३अ} \left\{ (४अ^2 + र_१^2)^{\frac{३}{२}} — ८अ^3 \right\}$$

१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन।

इस का $र = \frac{\pi}{२} \left(इ^{\frac{य}{\pi}} + इ^{-\frac{य}{\pi}}\right)$ यह समीकरण है

और जहाँ $य = ०$ वहाँ से गणना करने से $चा = \frac{\pi}{२} \left(इ^{\frac{य}{ग}} — इ^{\frac{-य}{ग}}\right)$

(७३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यदि य अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो उसका पृष्ठफल १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$\int २\pi र \frac{ताचा}{ताय}$ ताय यह होगा परन्तु यहाँ वक्र के लक्षण से

$र^२ = \frac{ग^२}{४}(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{-\frac{२य}{ग}} + २) = \frac{ग^२}{४}(इ^{\frac{२य}{ग}} - २ + इ^{-\frac{२य}{ग}} + ४) = चा^२ + ग^२$

इस लिये र तार = चा· ताचा। $\frac{र}{चा} = \frac{ताचा}{तार}$ और $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}})$

$= \frac{चा}{ग}$ इस लिये $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{र}{ग}$।

$\therefore पृ = २\pi \int र \frac{ताचा}{ताय} ताय = २\pi \int \frac{र^२ ताय}{ग} = \frac{२\pi}{ग}\int \frac{ग^२}{४}(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{\frac{२य}{ग}} + २) ताय$

$= \frac{\pi ग}{२}\int (इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{\frac{२य}{ग}} + २) ताय = \frac{ग^२\pi}{४}(इ^{\frac{२य}{ग}} - इ^{-\frac{२य}{ग}}) + ग\pi य$

$= \pi (र चा + ग य)$

इस से यह सिद्ध होता है कि चाप और कोटि के घात में ग गुणित भुज जोड़ कर उसको व्यास मानो तो इस व्यास पर से जो परिधि हो वही कातन्वली घनक्षेत्र का पृष्ठफल होगा।

इसी स्थान में यदि र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो पृष्ठफल =

$२\pi \int य ताचा = २\pi \int \frac{यर ताय}{ग} = \pi \int य(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}) ताय$

परन्तु $\int यइ^{\frac{य}{ग}} ताय = गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग\int इ^{\frac{य}{ग}} ताय = गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग^२इ^{\frac{य}{ग}}$

और $\int यइ^{-\frac{य}{ग}} ताय = -गयइ^{-\frac{य}{ग}} + ग\int इ^{-\frac{य}{ग}} ताय = -गयइ^{-\frac{य}{ग}}$

$- ग^२इ^{-\frac{य}{ग}}$ खण्डचलानयन से।

इस लिये

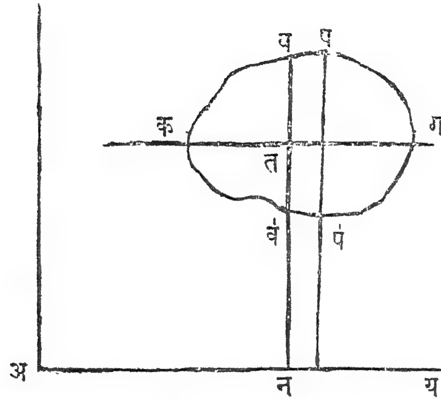
०, य के बीच में $पृ = \pi\int_0^य यइ^{\frac{य}{ग}} ताय + \pi\int_0^य यइ^{-\frac{य}{ग}} ताय$

$= \pi (गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग^२इ^{\frac{य}{ग}} + ग^२ - गयइ^{-\frac{य}{ग}} - ग^२इ^{-\frac{ग}{ग}} + ग^२)$

$$= २\pi \left\{ ग^2 + य\left[\frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} — इ^{-\frac{य}{ग}}\right)\right] - ग\left[\frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)\right] \right\}$$

$$= २\pi\,(ग^2 + यचा — गर) ।$$

१४८। कल्पना करो कि कवपग पव' क एक ऐसा सीमितवक्र है जिस का कग रेखा के दोनों ओर तुल्य अवयव है। कग रेखा अय अक्ष के समानान्तर और अय अक्ष क्षेत्र के बाहर है।



अय अक्षके चारो ओर इस क्षेत्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का पृष्ठफल १४१ प्रक्रम से यदि व, प और व'प' को बहुत ही पास पास समझो और अय अक्ष पर व न लम्ब को र, व'न लम्ब को र' और क ग के दोनो ओर सब तरह से क्षेत्र के समान भाग होने से वप चाप = व'प' चाप तो $२\pi \int (र + र')$ ताचा $= ४\pi$ क ताचा यहाँ क = तन इस लिये यदि समग्र वक्र की लम्बाई अर्थात् परिधि कवपगप'व' क का मान संचा हो तो समग्र पृष्ठफल $= २\pi$क $\times$ संचा ।

इस से यह सिद्ध होता है कि ऐसे क्षेत्रों का पृष्ठफल उन के परिधि और य अक्ष से समानान्तर रेखा का अन्तर जो हो उस को व्यासार्द्ध मानने से जो वृत्त की परिधि हो इन के घात के तुल्य होता है।

जैसे यदि वृत्त का समीकरण $(य — च)^2 + (र — ज)^2 — ग^2 = ०$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि य अक्ष के समानान्तर केन्द्रगामिनी रेखा जो होगी उस का य अक्ष से अन्तर ज होगा इस लिये य अक्ष के चारो ओर वृत्त के घूमने से गोलमुद्रिका होगी उस का पृष्ठफल = गोलपरिधि $\times$ ज व्यासार्द्ध की परिधि $= २\pi ग \times २\pi ज$

यहाँ यदि १४१वें प्रक्रम से समानान्तर रेखा के ऊपरी भाग का पृष्ठफल साधन करो तो $पृ = २\pi \int \left[ज + \sqrt{\{ग^2 — (य — च)^2\}}\right]$ताचा

$$= २\pi \int ज\ ताजा + २ग \int \sqrt{\{ग^2 — (य — च)^2\}}\ ताचा$$

$= २\pi जचा + २\pi \int \sqrt{\{ग^2 — (य — च)^2\}}$ ताचा $= २\pi जचा + २\pi गय$

लघुरूप करने से।

इसी प्रकार रेखा के नीचे के भाग का पृष्ठफल $= २\pi जचा — २\pi गय$ ऐसा होगा।

इस लिये समग्र घनफल $= २\pi ज \times २चा = २\pi गज \times$ गो· प·

१४९। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण श्रु = अ(१ + कोज्याष) यह है, स्थिर रेखा के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस के पृष्ठफल का ज्ञान करना हो तो १४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$पृ = २\pi \int श्रुज्याष \frac{ताचा}{ताप} ताष।$$

$$परन्तु \frac{ताचा}{ताष} = \sqrt{\left\{ श्रु^2 + \left[\frac{ताश्रु}{ताष}\right]^2 \right\}} = अ\sqrt{\{(१ + कोज्याष)^2 + ज्या^2ष\}}$$

$$= अ\sqrt{(२ + २कोज्याष)} = २अ\ कोज्या\frac{ष}{२}$$

$$इस\ लिये\ पृ = ४\pi अ^2 \int (१ + कोज्याष)कोज्या\frac{ष}{२}ज्याष\ ताष$$

$$= १६\ \pi अ^2 \int कोज्या^4 \frac{ष}{२}ज्या\frac{ष}{२}ताष = -\frac{३२\pi अ^2}{५}कोज्या^5 \frac{ष}{२} + स्थि।$$

$०, \pi$ के भीतर ष के मान में समग्र घनक्षेत्र का पृष्ठफल $= \frac{३२\pi अ^2}{५}$

१५०। कल्पना करो कि परस्पर लम्बरूप तीन धरातलों के योग रेखाओं के वश से किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ(य, र, ल) = ० यह समीकरण है (९८वाँ प्रक्रम देखो) तो इस पर से स्पष्ट है कि
ल = फा (य,र) ऐसा होगा। जिस पृष्ठविन्दु का भु = य, को = र, शं = ल है उस विन्दु पर घनक्षेत्र में स्पर्शधरातल करने की इच्छा है।

स्पर्शधरातल उसे कहते हैं जिस के और वक्र के पृष्ठ के बीच दूसरा धरातल न बन सके। इस धरातल के जानने के लिये पहले साधारण किसी धरातल का समीकरण बनाते हैं।

कल्पना करो कि किसी इष्टधरातल में प कोई विन्दु है जिस के शङ्कु ल का मूल यर धरातल में म और यर धरातल और इष्ट धरातल की योगरेखा कग है।

म विन्दुसे अय और अर अक्ष पर क्रम से मन, मत लम्ब डाल कर बढ़ा दो और मान लो कि कग रेखा में इन दोनों लम्बों का योग न', और त' विन्दु में हैं ।

प विन्दु से कग रेखा पर लम्ब पम' है ।

अब यहाँ घनक्षेत्रमिति से शं = ल = पम, भु = य = अन और कोटि = र = मन । ∠ मम'प = यर धरातल और इष्टधरातल से उत्पन्न कोण = इ, ∠ क = क, ∠ग = ग ।

नग = अग–अन = अग—य ∴ नन' = नग कोस्प न' = (अग–य) कोस्पक

और न'म = न'न–मन = (अग—य) कोस्पक—र. ∴ मम' = न'म ज्यान'

= (अग—य) कोज्याक—रज्याक परन्तु मम' = पम कोस्प ∠पम'म

= लकोस्पइ । इस लिये

(अग–य)कोज्याक–रज्याक = अगज्याग—यज्याग—रज्याक = लकोस्पइ

वा य ज्याग + रज्याक + लकोस्पइ—अगज्याग = ०, ... (१)

इस में ज्याग, ज्याक, कोस्पइ, और—अगज्याग इन स्थिराङ्कों को इन के महत्तमापवर्त्तन से भाग दे कर इन के स्थान में क्रम से आ, का, खा, गा का उत्थापन देवो तो धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० . . . . (२) यह हुआ

कल्पना करो कि पृष्ठ के उस विन्दु पर गये धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० यह है तो इस के दूसरे विन्दु के भु = य', को = र', शं = ल' से आय' + कार' + खाल' + गा = ० ऐसा समीकरण होगा ।

इस लिये दोनों के अन्तर से आ(य'—य) + का(र'—र) + खा(ल'—ल) = ०

इसलिये $ल' - ल = आं \triangle य + कां \triangle र$ जहाँ— $\frac{आ}{खा} = आं$ - $\frac{का}{खा} = -कां$

परन्तु $य + \triangle य$, $र + \triangle र$ भुजकोटि के वश से घनवक्र के पृष्ठ का शङ्कु

$$= ल + \frac{ताल}{ताय}\triangle य + \frac{ताल}{तार}\triangle र$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{ता^2 ल}{ताय^2}(\triangle य)^2 + 2\frac{ता^2 ल}{ताय\, तार}\triangle य \triangle र + \frac{ता^2 ल}{तार^2}(\triangle र)^2\right\} + \cdots$$

(चलनकलन का ६८वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये घनक्षेत्र के पृष्ठ के शङ्कु में धरातल के शङ्कु को घटा देने से

$$अन्तर = अं = \left(\frac{ताल}{ताय} - आं\right)\triangle य + \left(\frac{ताल}{तार} = कां\right)\triangle र$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{ता^2 ल}{ताय^2}(\triangle य)^2 + 2\frac{ता^2 ल}{ताय\, तार}\triangle य \triangle र + \frac{ता^2 ल}{तार^2}(\triangle र)^2\right\} + \cdots$$

यर धरातल में जिन विन्दुओं का य, र और $य + \triangle य$, $र + \triangle र$ भुजकोटि हैं उन पर गई रेखा य अक्ष से यदि ब कोण वनावे तो $\triangle र$ = यस्पब अन्तर में इन का उत्थापन देने से

$$अं' = \left\{\left[\frac{ताल}{ताय} - आं\right] + \left[\frac{ताल}{तार} - कां\right] स्पब\right\}\triangle य$$

$$+ \left[\frac{ता^2 ल}{ताय^2} + 2\frac{ता^2 ल}{ताय\, तार} स्प\, ब + \frac{ता^2 ल}{तार^2} स्प^2 ब\right\}\frac{(\triangle य)^2}{2} + \cdots\right]$$

इस लिये

$$\frac{अं'}{\triangle य} = \left[\frac{ताल}{ताय} - आं\right] + \left[\frac{ताल}{तार} - कां\right] स्प\, ब$$

$$+ \left\{\frac{ता^2 ल}{ताय^2} + 2\frac{ता^2 ल}{तायतार} स्प\, ब + \frac{ता^2 ल}{तार^2} स्प^2\, ब\right\}\frac{\triangle य}{2}$$

यह समीकरण दिखलाता है कि $\triangle य$ अत्यल्प लेने से $\frac{अं'}{\triangle य}$ यह

$\left(\frac{ताल}{ताय} - आं\right) + \left(\frac{ताल}{तार} - का\right)$ स्प ब इस के तुल्य हो सकता है इस में यदि

$\triangle य$, $\triangle र$ ऐसे हों कि $स्प\, ब = -\frac{\frac{ताल}{ताय} - आं}{\frac{ताल}{तार} - कां}$ तो स्पष्ट है कि एक दिशा में

परमाल्प अन्तर शून्य के लगभग होगा।

परन्तु यदि $\frac{ताल}{ताय} = आं$ और $\frac{ताल}{तार} = कां$ तो सब दिशाओं में परमाल्प अन्तर शून्य के लग भग होगा और $\triangle य$ के स्थान में ताय रखने से ठीक ही ठीक शून्य के तुल्य होगा ऐसी दशा में वह धरातल स्पर्शधरातल होगा

और उस का समीकरण अं, कं के स्थान में $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ का उत्थापन देने से

$$\text{ल}' - \text{ल} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}(\text{य}' - \text{य}) + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}(\text{र}' - \text{र}) \text{ यह होगा} \quad \cdots \quad (३)$$

(१) समीकरण का रूपान्तर करने से

$$\text{ल} = \text{अग स्प इ ज्या ग} - \text{य स्प इ ज्या ग} - \text{र स्प इ ज्या क}$$

$$\text{और ल}' = \text{अ ग स्प इ ज्या ग} - \text{य}' \text{ स्प इ ज्या ग} - \text{र}' \text{ स्प इ ज्या क}$$

$$\text{इस लिये ल}' - \text{ल} = -\text{स्प इ ज्या ग }(\text{य}' - \text{य}) - \text{स्प इ ज्या क}(\text{र}' - \text{र}), \cdots (४)$$

(३) और (४) का तुलना करने से

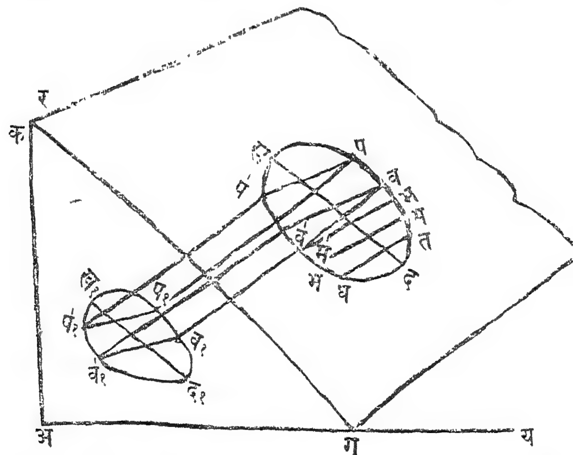
$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\text{स्पइज्याग}, \quad \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\text{स्पइज्याक} = -\text{स्पइकोज्याग}$$

$$\text{इस लिये} \quad \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ = \text{स्प}^२ \text{ इ}$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{छे इ} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२\right\}} \quad \cdots \quad (५)$$

मैं यहाँ पर घनक्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का वर्णन नहीं करता हूँ किन्तु घन-क्षेत्रमिति के बल से कुछ चलराशि के सिद्धान्त को दिखलाया चाहता हूँ । हिन्दी भाषा में घनक्षेत्रमिति के न होने से उपयोगी सिद्धान्तों का कुछ वर्णन कर दिया है । डिमार्गन (Demorgan) साहब ने चलनकलन और चलराशिकलन के १५ वें अध्याय में इस विषय पर बहुत बढ़ाकर लिखा है । चलराशिकलन में घन-क्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का लिखना मैं अनावश्यक समझता हूँ ।

१५१। कल्पना करो कि यर धरातल से जो इष्टधरातल इ तुल्य कोण बनाता है उसमें ख प ब भ म त द ध ख एक कोई क्षेत्र है इसके सीमा के प्रति-



बिन्दु से यर धरातल पर लम्ब डाल लम्बमूलों में रेखा कर देने से यर धरातल में एक नया क्षेत्र $\text{ख}_१\text{प}_१\text{ब}_१\text{द}_१\text{बं}_१\text{पं}_१\text{ख}_१$ उत्पन्न हुआ इस का फल जानना हो तो पहले क्षेत्र में कोई ख बिन्दु लेकर धरातलों के योगरेखा क ग के समानान्तर खद रेखा खींचो । इस का छोटा छोटा च के समान बहुतसा विभाग कर प्रति भागों पर पपं,

वर्व', भर्भ', इत्यादि लम्ब खड़ा कर दो इस तरह से इस क्षेत्र का समानलम्ब-चतुर्भुज रूप बहुत खण्ड हो गये जिन में किसी एक पर्प' व' व चतुर्भुज का फल = च $\left[\frac{\text{पर्प'} + \text{वर्व'}}{2}\right]$ और इस चतुर्भुज के वश से यर धरातल में नये क्षेत्र में भी लम्बमूल के वश से एक समान लम्ब $\text{प}_1\text{पं}_1\text{वं}_1\text{व}_1$ चतुर्भुज उत्पन्न होगा जिस में $\text{प}_1\text{पं}_1$ = कोज्याइ × प पं, $\text{वं}_1\text{व}_1$ = कोज्याइ × व वं और इस में लम्ब मान वही च के तुल्य होगा इस लिये इस का फल

$$= \text{च}\left[\frac{\text{प}_1\text{पं}_1 + \text{व}_1\text{वं}_1}{2}\right] = \text{च}\left[\frac{\text{प पं} + \text{व वं}}{2}\right] \text{कोज्या इ} = \text{पहले चतुर्भुज का}$$

फल × कोज्या इ ॥ इसी तरह सब पहले चतुर्भुजों के फल को कोज्याइ से गुण देने से नये क्षेत्र के चतुर्भुजों का सब फल होगा इस लिये सब चतुर्भुजों का योग नये क्षेत्र का फल = पहले क्षेत्र के चतुर्भुजों का योग × कोज्याइ = पहले क्षेत्र का फल × कोज्याइ।

इस से यह सिद्ध होता है कि जिस धरातल में जो कोई क्षेत्र हो उसके प्रान्त से दूसरे धरातल में लम्ब डाल इस क्षेत्र को दूसरे धरातल में परिणमन करें तो परिणत क्षेत्र का फल पहले क्षेत्र के फल को धरातलों के झुकाव की कोटिज्या से गुण देने से होगा।

१५२। कल्पना करो कि किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ (य, र, ल) = ० यह समीकरण है। पृष्ठ के प विन्दु का भु = य, को = र, —श = ल और प विन्दु के बहुत ही पास जो व विन्दु है उस का भु = य + $\triangle$य, को = र + $\triangle$र, शं = ल + $\triangle$ल। प, विन्दु पर एक स्पर्शधरातल बना लो और प और व विन्दुओं में लगा कर य ल, र ल, धरातलों के समानान्तर धरातलों को बनावो तो समानान्तर धरातलों से जो स्पर्शधरातल में अवयव उत्पन्न हुआ उसके प्रान्त से य र धरातल पर यदि लम्ब डालें तो उस का परिणत रूप एक आयत होगा जिसका भुज = $\triangle$य, को = $\triangle$र इस लिये स्पर्शधरातल के अवयव का फल = $\frac{\triangle\text{य} \times \triangle\text{र}}{\text{कोज्या इ}}$। १५१ प्रक्रम से इस में स्पष्ट है कि $\triangle$ य के स्थान में यदि ताय को रख दें तो स्पर्शधरातल का अवयव घनक्षेत्र के पृष्ठ का अवयव हो जायगा। परन्तु जब

य = ताय तो र = तार इस लिये रल धरातल के समानान्तर दोनों

धरातलों के बीच का पृष्ठफल $= \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}}$ और समग्र पृष्ठफल

$$= \int \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}} = \int\int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ \right\}} \text{ तार ताय}$$

१५० प्रक्रम और द्विगुण चलानयन से

यहाँ यदि पहले तार को स्थिर मान चलानयन करो तो यल धरातल के समानान्तर धरातल जो हैं उन के बीच का पहले पृष्ठफल आवेगा फिर इस पर से तार के वश से समग्र पृष्ठफल आ जायगा।

पृष्ठ के समीकरण के वश से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ के मान विदित हो जायँगे फिर य, और र के उचित सीमाओं पर से अभीष्ट पृष्ठखण्ड का फल $\int\int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ \right\}}$ तार ताय इस पर से विदित हो जायगा।

जैसे (१) जिस गोल के पृष्ठ का $य^२ + र^२ + ल^२ = अ^२$ यह समीकरण है उस के अष्टमांश का पृष्ठफल जानना है तो यहाँ

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\frac{य}{ल}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\frac{र}{ल}$$

इसलिये $पृ = \int\int \sqrt{(१ + \frac{य^२}{ल^२} + \frac{र^२}{ल^२})} \text{ तार ताय}$

$$= \int\int \frac{\text{अतार ताय}}{\sqrt{(अ^२ - य^२ - र^२)}}$$

$$= अ \int\int \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(अ^२ - य^२ - र^२)}} = अ \int\int \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(र_१^२ - र^२)}} \text{ यदि } अ^२ - य^२ = र_१^२$$

परन्तु $\int \frac{\text{तार}}{\sqrt{(र_१^२ - र^२)}} = \text{ज्या}^{-१} \frac{र}{र_१}$

यहाँ यदि $ल = ०$ तो यर धरातल में जो गोलपृष्ठ का अवयव लगा है उस का समीकरण $अ^२ - य^२ = र^२ = र_१^२$ ऐसा होगा इस में यदि $र = ०$, और $र = र_१$ मानें तो अय अक्ष के ऊपर से य र धरातल और गोलपृष्ठ के सम्पात तक रल धरातल के समानान्तर धरातलों के बीच का

$$\text{पृष्ठफल} = \int_०^{र_१} \frac{\text{तार}}{\sqrt{(र_१^२ - र^२)}} = \frac{\pi}{२}$$

इसलिये $पृ = \frac{अ\pi}{२} \int \text{ताय}$ इस में यदि ० और अ के बीच य के मान

में चलानयन करें तो गोल के अष्टमांश पृष्ठ का फल $= \frac{\pi अ^2}{२}$ इस लिये समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^2$ ।

इसी स्थान में यदि पहले ताय और फिर तार के वश से चलानयन करें तो ऊपर की युक्ति से अष्टमांश पृष्ठ का फल

$$= \int_0^{अ} \int_0^{य_१} \frac{अ ताय\, तार}{\sqrt{(अ^2 - र^2 - य^2)}}$$ । जहाँ $य_१^2 = अ^2 — र^2$

(२) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $ल^2 + (य\, कोज्याअ_१ + रज्याअ_१)^2 — अ^2 = ०$ यह समीकरण है उस के पृष्ठ फल का क्या मान होगा।

यहाँ $\frac{ताल}{ताय} = -\frac{कोज्याअ_१(यकोज्याअ_१ + रज्याअ_१)}{ल}$

$$\frac{ताल}{तार} = -\frac{ज्याअ_१(यकोज्याअ_१ + रज्याअ_१)}{ल}$$

इसलिये $पृ = \int\int \frac{अतारताय}{ल} = \int\int \frac{अतार\, ताल}{\sqrt{\{अ^2 - (यकोज्याअ_१ + रज्याअ_१)^2\}}}$

यर धरातल घनपृष्ठ को जहाँ काटता है उस का समीकरण $अ = \pm (यकोज्याअ_१ — रज्याअ_१)$ यह है। यहाँ धनचिह्न ग्रहण करने से धन पद में $र = (अ — यकोज्याअ_१)$ कोछेअ$_१$

अब $\int \frac{तार}{\sqrt{\{अ^2 - (यकोज्याअ_१ + रज्याअ_१)^2}}$

$= \frac{१}{ज्याअ_१} ज्या^{-१} \frac{य\, कोज्याअ_१ + रज्याअ_१}{अ}$ इस का $र = ०$ और

$र = (अ - य\, कोज्याअ_१)$कोछेअ$_१$ के भीतर का मान

$$= \frac{१}{ज्याअ_१}\left(\frac{\pi}{२} - ज्या^{-१}\frac{यकोज्याअ_१}{अ}\right)$$

इस लिये $पृ = \frac{अ}{ज्याअ_१} \int \left(\frac{\pi}{२} — ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ}\right) ताय$

इस में यदि $ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ} = स$, तो $\frac{अज्यास}{कोज्याअ_१} = य$ और

$$\frac{\text{अकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_{१}} = \text{ताय}$$

इसलिये

$$\int \text{तायज्या}^{-१}\frac{\text{यकोज्याअ}_{१}}{\text{अ}} = \int \frac{\text{असकोज्यासताम्}}{\text{कोज्याअ}_{१}} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}}\int \text{सकोज्यासतास}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}}(\text{स्ज्यास} + \text{कोज्यास})$$

अब ० और $\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}}$ के भीतर य के मान में

$$\text{पृ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_{१}}\int \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}}\left(\frac{\pi}{२} - \text{ज्या}^{-१}\frac{\text{यकोज्याअ}_{१}}{\text{अ}}\right)\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_{१}}\left(\frac{\pi}{२}\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}} + \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}} - \frac{\pi}{२}\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_{१}}\right) = \frac{\text{अ}^{२}}{\text{ज्याअ}_{१}\text{कोज्याअ}_{१}}$$

यह पृष्ठफल धन पद में जो घनक्षेत्र का खण्ड है उस का हुआ।

यदि ध्यान दे कर विचार करो तो जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण ऊपर लिख कर दिखाया है वह एक समतलमस्तक रूप शङ्कु है जिस के अक्ष का समीकरण $\text{ल} = ०$, $\text{य कोज्याअ}_{१} + \text{रज्याअ}_{१} = ०$ ऐसा होगा।

१५३। बहुत से घनक्षेत्र के पृष्ठ ऐसे होते हैं जिन के पृष्ठ का अवयव जो १५२ प्रक्रम में देखा गया है एक ही होते हैं। जैसे जिस पृष्ठ का $२\text{अल} = \text{य}^{२} + \text{र}^{२}$ यह समीकरण है उस में

$$\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^{२} = \frac{\text{य}^{२} + \text{र}^{२}}{\text{अ}^{२}}$$ और जिस के पृष्ठ का समीकरण

$\text{अल} = \text{यर}$ यह है उस में भी $\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^{२} = \frac{\text{य}^{२} + \text{र}^{२}}{\text{अ}^{२}}$

वही सिद्ध होता है इस लिये दोनों में पृष्ठ का परमाल्पमान अर्थात् तात्कालिकी गति एक ही है। ऐसे पृष्ठों का यूलर (Euler) ने Congruent नाम रक्खा है मैं इन्हें समगतिक पृष्ठ कहता हूँ।

इसी प्रकार $(\text{ल}-\text{ग})^{२} = \{(\text{य}-\text{अ})^{२} + (\text{र}-\text{क})^{२}\}\text{स्प}^{२}\text{इ}$ इस शङ्कु और

य कोज्या$अ_१$ + र कोज्या$क_१$ + ल कोज्या$इ_१$ = घ इस धरातल में भी पृष्ठ का अवयव एक ही है। जहाँ कोज्या^{२}$अ_१$ + कोज्या^{२}$क_१$ + कोज्या^{२}$इ_१$ = १ इसी तरह

$$२अल = य^२ + र^२$$

$$२अल = (य^२ — र^२)ग + २यर\sqrt{(१ — ग^२)}$$

$$२अल = \{ (य^२ + र^२)^२ — ४कयर + २ग(य^२ — र^२) + क^२ + ग^२ \}^{\frac{१}{२}}$$

इत्यादि सब पृष्ठ समगतिक पृष्ठ हैं।

१५४। यदि स्पर्शधरातल में ऐसा एक अवयव लें जिस का यर धरातल में परिणत मान श्रुताश्रुताप यह हो तो

$$पृ = \int\int\sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{ताल}{ताय}\right)^२ + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^२ \right\}}\ श्रुताश्रुताप$$

जैसे जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का यर = अल यह समीकरण है वह $य^२ + र^२ = ग^२$ इस वृत्त से काटा गया तो कटे खण्ड का पृष्ठफल जानना हो तो यहाँ

$$छेइ = \sqrt{\left(१ + \frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{अ^२}\right)} = \frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ}\ क्योंकि\ य^२ + र^२ = श्रु^२$$

$$इस\ लिये\ पृ = \int_{०}^{२\pi}\int_{३}^{ग}\frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ}\ श्रुताश्रुताप$$

$$परन्तु \int\frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ}\ श्रुताश्रु = \frac{१}{३अ}(अ^२ + श्रु^२)^{\frac{३}{२}}$$

$$इस\ लिये \int_{०}^{ग}\frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ}\ श्रुताश्रु = \frac{१}{३अ}\left\{(अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} — अ^३\right\}$$

$$और \int\frac{१}{३अ}\left\{(अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} — अ^३\right\}ताप = \frac{प}{३अ}\left\{(अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} — अ^३\right\}$$

$$इस\ लिये\ अभीष्ट\ पृष्ठफल = \int_{०}^{२\pi}\int_{०}^{ग}\frac{\sqrt{(अ^२ + ग^२)}}{अ}\ श्रुताश्रुताप$$

$$= \frac{२\pi}{३अ}\left\{(अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} — अ^३\right\}$$

१५५। यदि पृष्ठ का अक्षीय समीकरण लें अर्थात्

$य = श्रुज्याप कोज्याप_1$, $र = श्रुज्यापज्याप_1$, $ल = श्रु कोज्याप$

और इन पर से ताय, तार इत्यादि का मान बना कर

$$पृ = \int\int\sqrt{\left\{ १ + \left[\frac{ताल}{ताय}\right]^2 + \left[\frac{ताल}{तार}\right]^2 \right\}}\ तार\ ताय$$

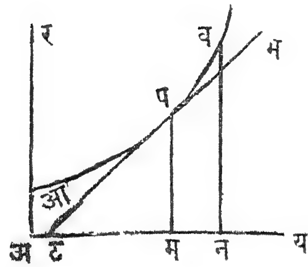
इस में उत्थापन दें तो

$$पृ = \int\int\sqrt{\left\{ श्रु^2 ज्या^2 प + \left[\frac{ताश्रु}{ताप}\right]^2 ज्या^2 प + \left[\frac{ताश्रु}{ताप_1}\right]^2 \right\}}\ श्रुताप\ ताप_1$$

ऐसा सिद्ध होगा। जहाँ सुभीता समझ पड़े तहाँ इस पर से भी उचित सीमाओं के भीतर पृष्ठफल जान सकते हो विस्तार के भय से बहुत बढ़ाना नहीं चाहते। २५० प्रक्रम के (३) उदाहरण तक पहुँचोगे तो स्पष्ट घनक्षेत्र हो जायगा।

वक्र का घनफलानयन।

१५६। कल्पना करो कि आ, वक्र में नियत विन्दु और प कोई विन्दु है जिस का भु = अम = य, को = पम = र और मान लो कि आ के भुज से य बड़ा है।



कल्पना करो कि आपव वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र वनाता है तो यदि आ और प विन्दु में गये और य अक्ष पर लम्बरूप ऐसे दो धरातलों से घनक्षेत्र को काटें और इन दोनों धरातलों के वीच में के घनफल को घ कहें तो चलनकलन के १६० वें प्रक्रम से

$$\frac{ताघ}{ताय} = \pi र^2$$

इस लिये $घ = \int \pi र^2\ ताय$

वक्र के समीकरण से र का ज्ञान य के फल के रूप में आजायगा। समझ लो कि $\int \pi र^2 ताय = फा(य)$ तो

$$घ = फा(य) + स्थि$$

कल्पना करो कि जिस विन्दु का $भु = य_1$ उस का $घनफल = घ_1$ और जिस विन्दु का $भु = य_2$ उस का $घनफल = घ_2$ है तो

$$घ_1 = फा(य_1) + स्थि$$

$$घ_2 = फा(य_2) + स्थि$$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = फा(य_2) - फा(य_1) = \int_{य_1}^{य_2} \pi र^2 ताय = \pi \int_{य_1}^{य_2} र^2 ताय$

१५७। समसूच्याकार शङ्कु का घनफलानयन।

कल्पना करो कि एक सरल रेखा अ मूल विन्दु में हो कर गई है और य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाती है तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से समसूची उत्पन्न होगी (१४३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यहाँ $र = य \cdot स्पअ$

$$घ = \int \pi स्प^2अ\, य^2 ताय = \frac{\pi स्प^2अ \cdot य^3}{3} + स्थि$$

और $घ_2 - घ_1 = \frac{\pi स्प^2अ}{3}(य_2^3 - य_1^3)$

कल्पना करो कि $य_1 = 0$ और $त्रि = य_2\, स्पअ$ अर्थात् $य_2 = \frac{त्रि}{स्पअ}$ तो समसूच्याकार शङ्कु (जिसके आधार परिधि का व्यासार्द्ध त्रि है) का

$$घनफल = \frac{\pi स्प^2अ}{3} \times \frac{त्रि^3}{स्प^3अ} = \frac{\pi त्रि^3}{3 स्पअ} = \frac{\pi त्रि^2 य_2}{3}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि समखात फल की तिहाई सूची का घनफल होता है। इस को भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में लिखा है।

१५८। गोल का घनफलानयन।

$$यहां\ र^2 = अ^2 - य^2$$

इस लिये $घ = \int \pi र^2 ताय = \pi \int (अ^2 - य^2) ताय$

$= \pi(अ^2 य - \frac{य^3}{3}) + स्थि$। $य = 0$ और $य = अ$ मानने से आधे गोल का

$घनफल = \frac{2\pi अ^3}{3}$ इस लिये सम्पूर्ण घनफल $= \frac{4\pi अ^3}{3} = \frac{4\pi अ^2 \times 2अ}{6}$

$= \frac{पृफ \times व्या}{6}$ अर्थात् पृष्ठफल को व्यास से गुण कर छ का भाग देने से गोल का घनफल होता है। इस को भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में लिखा है।

१५९। जिस परवलय का $र^2 = 4अय$ यह समीकरण है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$घ = \int \pi र^2 ताय = \pi \int ४अय\, ताय = ४अ\pi \int यताय = २अ\pi य^2 + स्थि$

इस लिये $घ_2 — घ_1 = २अ\pi (य_2^2 — य_1^2)$ इस में यदि $य_1 = ०$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = ०$ इस लिये $र_2$ कोटि से बने वृत्त और शिरः स्थान के भीतर का घनफल $= २अ\pi य_2^2 = \frac{४अय_2 \pi य_2}{२} = \frac{\pi र_2^2 य_2}{२}$

अर्थात् जिस समतलमस्तकपरिधि शङ्कु का आधार $र_2$त्रिज्या से उत्पन्न परिधि हो और उँचाई $य_2$ हो उस के घनफल के आधे के बरावर उसी उँचाई और उसी आधार से जो परवलय का घनक्षेत्र होगा उस का घनफल होगा।

१६०। चलनकलन के ३८८ पृष्ठ में जो चक्रालद (Cycloid) का समीकरण

$र = क\, (अ + ज्याय)$, $य = क\, (१ — कोज्याअ)$ यह लें तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$घ = \int \pi र^2 ताय = \pi क^3 \int (अ + ज्याअ)^2 ज्याअताअ$

$= \pi क^3 \int (अ^2 + २अज्याअ + ज्या^2अ) ज्याअताअ$

यहाँ खण्डचलानयन से

$\int अ^2 ज्याअताअ = — अ^2 कोज्याअ + २ \int अकोज्याअताअ$

$= — अ^2 कोज्याअ + २अज्याअ + २कोज्याअ।$

$\int २अज्या^2 अताअ = \int अ(१ — कोज्या२अ)ताअ$

$= \frac{अ^2}{२} - \frac{अज्या२अ}{२} - \frac{कोज्या२अ}{४}।$

और $\int ज्या^3 अताअ = \frac{कोज्याअज्या^2अ}{३} + \frac{२}{३} \int ज्याअताअ$

$= - \frac{कोज्याअज्या^2अ}{३} - \frac{२कोज्याअ}{३}$ (१२ वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण से)।

अब आधे चक्रालद के घूमने से जो घनक्षेत्र होता है उस के घनफल का ज्ञान करना हो तो $य = ०$ और $य = २क$ वा $अ = ०$, $अ = \pi$ के भीतर ऊपर के चलों का मान ले आने से

$\int_0^\pi अ^2 ज्याअताअ = \pi^2 — २ — २ = \pi^2 — ४$

$२ \int_0^\pi अज्या^2 अताअ = \frac{\pi^2}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{४} = \frac{\pi^2}{२},$

और $\int_{0}^{\pi}$ ज्या^{३}अताअ $= \frac{२}{३} + \frac{२}{३} = \frac{४}{३}$,

इस लिये अभीष्टघनफल

$$= \pi क^{३} \left\{ \pi^{२} — ४ + \frac{\pi^{२}}{२} + \frac{४}{३} \right\} = \pi क^{२} \left(\frac{३\pi^{२}}{२} - \frac{८}{३} \right) ।$$

१६१। यदि वक्र र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो स्पष्ट है कि उस का घनफल य और र को बदल देने से $\int \pi य^{२} तार$ यह होगा। इस लिये $घ_{२} — घ_{१} = \pi \int_{र_{१}}^{र_{२}} य_{२} तार$ ऐसा होगा।

१६२। परवलय का $र^{२} = ४अय$ यह समीकरण है और यह र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो इस का घन फल ऊपर के प्रक्रम से

$$घ = \int \pi य^{२} तार = \pi \int \frac{र^{४}}{१६अ^{२}} तार = \frac{\pi र^{५}}{८०अ^{२}} + स्थि$$

इस लिये $घ_{२} — घ_{१} = \frac{\pi(र_{२}^{५} — र_{१}^{५})}{८०अ^{२}}$। इस में यदि $र_{१} = ०$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_{१} = ०$ इस लिये $र_{२}$ त्रिज्या से बने वृत्त और शिरः स्थान के भीतर का घनफल $= \frac{\pi र_{२}^{५}}{८०अ^{२}}$।

१६३। यदि दो वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर दो घनक्षेत्र बनाते हों तो जो धरातल य अक्ष पर लम्ब है ऐसे दो धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों के काटने से उन के भीतर जो घनफल होंगे उन के अन्तर को घ कहो और पहले वक्र का र = फ(य) यह और दूसरे का र = फ(य) यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि $घ = \pi \int [\{ फ(य) \}^{२} — \{ फ(य) \}^{२}] ताय$ यह होगा।

जिन दोनों लम्बरूपी धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों को काटा है उन का समीकरण क्रम से यदि $य = य_{१}$, $य = य_{२}$ ऐसे हों तो ऊपर के चल में $य_{१}$, $य_{२}$ के भीतर जो मान होगा वही घनफलों का अन्तर होगा।

कल्पना करो कि एक सीमित वक्र ऐसा है कि एक सरल रेखा जिस का समीकरण र = क है उस के सब कोटि खण्डरूपी पूर्णज्याओं का समान द्विभाग करती है (१४८वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) तो पूर्णज्या का मान यदि फि(य) हो तो रेखा के नीचे वक्र के भाग का समीकरण र = अ — फि(य) = फा(य) और ऊपर

के भाग का समीकरण र = क + फि(य) = फ(य) ऐसा होगा। इस लिये दोनों भागों से उत्पन्न घनक्षेत्र का फल = घ = $\pi\int[\{$फ(य)$\}^2 - \{$फा(य)$\}^2]$ताय

= ४πक$\int$फि(य)ताय

कल्पना करो कि सीमित वक्र के दोनों प्रान्त के जहाँ कोटि वक्र की स्पर्शरेखा हो जाती है भुज क्रम से $य_1$, $य_2$ हैं तो य अक्ष के चारो ओर सीमित वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र उत्पन्न होगा उस का घन—

फल = ४πक$\int_{य_1}^{य_2}$फि(य)ताय यह होगा।

यह अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा इस वाक्य का तात्पर्य यह है कि य, और र अक्ष से जितने जितने अन्तर पर वक्र के प्रत्यवयव हैं उतने ही उतने ही अन्तर पर सर्वत्र रहें ऐसा वक्र को चारो ओर घुमानेसे वक्र के आकार के बश से आकाश में जो घनाकृति उत्पन्न हो वही वक्रजन्य घनक्षेत्र है।

ऊपर के घनफल में अर्थात् $\pi\int[\{$फ(य)$\}^2 - \{$फा(य)$\}^2]$ताय इस में यदि फ(य) के स्थान में र और फा(य) के स्थान में $र'$ रख दें तो

घ = $\pi\int(र^2 - र'^2)$ताय = $\pi\int(र + र')(र - र')$ताय = २πक$\int(र - र')$ताय ऐसा होगा परन्तु $\int(र - र')$ताय यह पिछले अध्याय से सीमित वक्र का फल है।

इस लिये यदि सम्पूर्ण वक्र का फल आ हो तो सम्पूर्ण घनक्षेत्र का फल २πक × आ होगा। यहाँ भी १४८ प्रक्रम के ऐसा समझ लेना चाहिये कि वक्र का सब भाग य अक्ष के ऊपर है। यदि वक्र का कुछ भाग य अक्ष के नीचे भी हो तो सहज में दिखला सकते हो कि २πक × आ यह य अक्ष के नीचे और ऊपर के घनक्षेत्र विभागों के घन फलों का अन्तर होगा।

जैसे १४८ प्रक्रम में जो $(य - च)^2 + (र - ज)^2 - ग^2 = 0$ इस वृत्त के य अक्ष के चारो ओर घूमने से गोलीय मुद्रिका होगी उस का घनफल ऊपर की युक्ति से $2\pi^2 ग^2 ज$ यह होगा जहाँ ग वृत्त का व्यासार्द्ध और ज; य अक्ष से वृत्त के केन्द्र का लम्बरूपी अन्तर है।

१६३। इसी तरह यदि दोनों वक्र जिन के समीकरण क्रम से

य = फ(र), य = फा(र)

ये हैं र अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से घनफलान्तर = घ = $\pi\int[\{$फ(र)$\}^2 - \{$फा(र)$\}^2]$ तार यह होगा।

फिर इस पर से पूर्ववत् विचार कर सकते हो।

१६४। १५६वें प्रक्रम में घनफल के लिये जो युक्ति लिखी गई है उसी युक्ति से चाहे जैसा घनक्षेत्र हो सब का घनफल जान सकते हैं।

जैसे किसी घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से काटें और कटे क्षेत्र का फल फ(य) कल्पना करें तो स्पष्ट है कि इस लम्बरूपी धरातल के बहुत ही पास जो दूसरा लम्बरूप धरातल है उस से भी जो कट कर दोनों धरातलों के बीच में घनक्षेत्र का घनफल △घ है वह फ(य)△य के समान होगा इस लिये

$\frac{\triangle घ}{\triangle य} =$ फ(य) △ य को शून्य अर्थात् ताय मानने से

$\frac{ताघ}{ताय} =$ फ(य) $\therefore$ घ $= \int$ फ(य) ताय ऐसा होगा।

१६५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र जिसके पृष्ठ का समीकरण

$\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} + \frac{ल^2}{ग^2} = १$ यह है उसका घनफलानयन।

यहाँ यदि घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब धरातल से काटो जो कि मूल विन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा है तो घनक्षेत्र के लक्षण से कटा हुआ प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिसके दोनों व्यासार्द्ध क्रम से

$क\sqrt{\left[१ - \frac{य^2}{अ^2}\right]}, ग\sqrt{\left[१ - \frac{य^2}{२}\right]}$ ये हैं इस लिये छेदित प्रदेश का

फल = फ(य) = π क ग$\left(१ - \frac{य^2}{अ^2}\right)$ यह हुआ और अभीष्ट क्षेत्र का संपूर्ण घनफल

$$= \int_{-अ}^{अ} \left[१ - \frac{य^2}{अ^2}\right] \pi क ग ताय = \frac{४\pi अ क ग}{३}$$

१६६। किसी सूची क्षेत्र का घनफलानयन।

कल्पना करो कि सूची का आधार कोई बहुभुजक्षेत्र है जिस का फल आ है और सूची का बेध वा उँचाई वे है तो यदि भुज, कोटि शङ्कुओं का मूल विन्दु सूची का शिरःस्थान मानें और य अक्ष को सूची के आधार पर लम्ब रूप मानें तो १६४ प्रक्रम की युक्ति से सूची का घनफल $\int_{0}^{वे}$ फ(य) ताय

यह होगा। अब यदि य अक्ष पर लम्बरूपी धरातल से सूची को काटें

तो स्पष्ट है कि छेदित प्रदेश आधार का सजातीय होगा इस लिये इस प्रदेश का फल = फ(य) $= \frac{य^2 आ}{वे^2}$ इस लिये सूची का घनफल

$$= \int_0^{वे} फ(य)ताय = \int_0^{वे} \frac{य^2 आ}{वे^2} ताय = \frac{आ}{वे^2}\int_0^{वे} य^2 ताय = \frac{आ \cdot वे}{३}$$

बहुभुज क्षेत्र रूपी आधार के स्थान में यदि कोई सीमित क्षेत्र हो तब भी यही घनफल आवेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि आधार पर वेध तुल्य वेध में जो समखात का घनफल होता है उसके तृतीयांश के तुल्य सूची का घनफल होता है। इसको भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती के खातव्यवहार में लिखा है (समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति) परन्तु इसकी उपपत्ति कहीं नहीं लिखी है।

१६७। कल्पना करो कि $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} - \frac{ल^2}{ग^2} = १$ यह एक आतिपरवलयिक घनक्षेत्र का समीकरण और $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} - \frac{ल^2}{ग^2} = ०$ यह एक समसूच्याकार शङ्कु का समीकरण है तो पहले घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब और मूल विन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा हुआ जो धरातल है उस से काटें तो छेदित प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिस का फल फ(य) = π क ग $\left[\frac{य^2}{अ^2} + १\right]$ यह होगा और उसी धरातल से शङ्कु का छेदित प्रदेश भी दीर्घवृत्तही होगा जिसका फल = फा(य) = $\frac{\pi \text{ क ग } य^2}{अ^2}$ इस लिये दोनों का अन्तर π क ग यह हुआ। इस लिये शङ्कु, आतिपरवलयिक और दो लम्ब रूपी धरातल जो मूल विन्दु से क्रम से $य_१$, $य_२$ तुल्य हट कर य अक्ष में लगे हैं उनके भीतर का घनफल $= \int_{य_१}^{य_२} \pi$ क ग ताय

$= \pi$ क ग $(य_२ - य_१)$

१६८। जिन समानान्तर धरातलों से घनक्षेत्र को काट कर ऊपर के प्रक्रमों में घनफल साधन की युक्ति दिखाई है वे यदि य अक्ष पर लम्ब न हों किन्तु य अक्ष उन से $अ_१$ तुल्य झुका हो तो स्पष्ट है कि $\int$ फ(य) ताय इस

के स्थान में $\int$ फ(य) ज्याअ$_{१}$ताय इस को लेने से घनफल का मान आ जायगा।

१६९। १६४वें प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int$ फ (य) ताय इस लिये फ(य) को कल्पना कर लें कि किसी वक्र की कोटि र है तो १३८वें प्रक्रम की युक्ति से तीन समानान्तर वा चार समानान्तर धरातलों से जिन का परस्पर अन्तर = च है छेदित प्रदेश के फलों से आद्यन्त धरातलान्तर्गत घन फल का स्वल्पान्तर से मान $\frac{च}{३}$ (आ$_{०}$+४ आ$_{१}$+आ$_{२}$) वा $\frac{३च}{८}$ { आ$_{०}$ + आ$_{३}$ + ३(आ$_{१}$+आ$_{२}$) } यह होगा जहाँ र$_{०}$, र$_{१}$, इत्यादि के स्थान में आ$_{०}$, आ$_{१}$ इत्यादि को रख दिया है।

१७०। १५६वें प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int \pi$ र^{२} ताय परन्तु

πर^{२} = $\int$ २ π र तार इस लिये द्विगुण चलानयन की रीति से घनफल को $\int\int$२ π र तार ताय = २ $\pi\int\int$र तार ताय इससे प्रकाश कर सकते हैं। ११४वें प्रक्रम के क्षेत्र को यदि य अक्ष के चारो ओर घुमावें तो द ट चतुर्भुज से एक वलय उत्पन्न होगा जिसका घनफल स्वल्पान्तर से २ πर $\triangle$ य $\triangle$ र यह होगा और एक स्तम्भ में जितने चतुर्भुज हैं सब से उत्पन्न वलयों के घनफल का योग $\triangle$ य$\int_{फ(य)}^{फा(य)}$ २ π र तार अर्थात्

$\triangle$ य× २π $\int_{फ(य)}^{फा(य)}$ र तार = π $\triangle$ य [{ फा(य) }^{२}– { फ(य) }^{२}] यह होगा

इस लिये काता कत के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का घनफल

$$= \pi\int_{अगा}^{अचा_{१}} [\{ फा(य) \}^{२}] - \{ फ(य) \}^{२}] ताय$$

$$= \int_{य_{१}}^{य_{२}}\int_{फ(य)}^{फा(य)} २\pi र\ तार\ ताय$$

$$= २\pi \int_{य_{१}}^{य_{२}}\int_{फ(य)}^{फा(य)} र\ तार\ ताय$$ यदि अचा = य$_{२}$, अगा = य$_{१}$

ऊपर के $\pi \int_{\text{अगा}}^{\text{अचा}_1} [\{ \text{फा(य)} \}^2 - \{ \text{फ(य)} \}^2]$ ताय इस समीकरण में यदि फा(य) के स्थान में फ (य) और फ (य) के स्थान में फा(य) को रख दें तो ठीक १६३वें प्रक्रम का समीकरण हो जायगा।

१७१। यदि जिन वक्रों के क्रम से य = फ(र), य = फा(र) ये समीकरण हैं उन के चाप से और जिन रेखाओं के क्रम से $\text{र} = \text{र}_1$, $\text{र} = \text{र}_2$ ये समीकरण हैं उन से बना हुआ क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर की युक्ति से उसका घनफल $= 2\pi \int_{\text{र}_1}^{\text{र}_2} \int_{\text{फा(र)}}^{\text{फ(र)}}$ र ताय तार ऐसा होगा इस का ताय के वश यदि चल बना लो तो

$$\text{घ} = 2\pi \int_{\text{र}_2}^{\text{र}_1} \{ \text{फ(र)} - \text{फा(र)} \} \text{ र तार}$$

१७२। ऊपर के प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये ११६वें प्रक्रम का क्षेत्र लो। कल्पना करो कि अलक वक्र क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घन क्षेत्र बनाया उसका घनफल जानना है तो स्पष्ट है कि कनल के घूमने से जो अर्द्ध-गोल होगा और अनल के घूमने से जो परवलय संबन्धि घनक्षेत्र होगा उनके घनफलों के अन्तर के समान अभीष्ट घनफल होगा। इन दोनों घनक्षेत्रों का घन-फल पिछले प्रक्रमों से विदित है इसलिये अभीष्टघनक्षेत्र का घनफल भी इन दोनों के अन्तर पर से विदित होगा इसलिये द्विगुण चलानयन से जो इसका घनफल निकलेगा उसकी जाँच अच्छी तरह से इस उदाहरण में होगी अर्थात् दोनों रीति से फलों का मान एक हो जानेसे मन भर जायगा मानो कि न मूल विन्दु और नक य अक्ष में धनात्मक मार्ग है तो अल वक्र का समीकरण $\text{र}^2 = 4\,\text{अ}\,(\text{अ} - \text{य})$ और कल का $\text{र}^2 = 4\,\text{अ}^2 - \text{य}^2$ यह होगा।

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से अभीष्ट घनफल

$$= \int_0^{2\text{अ}} \int_{\frac{4\text{अ}^2 - \text{र}^2}{4\text{अ}}}^{\sqrt{(4\,\text{अ}^2 - \text{र}^2)}} 2\pi \text{ र ताय तार}$$

इसी जगह यदि यह इच्छा होकि पहले र के वश से चलानयन करें तो अलक का अफ रेखा से दो विभाग करने से

घ = वृत्त खण्ड का घ॰ फ + परवलय के खण्ड का घ॰ फ

$$= \int_{अ}^{२अ} \int_{0}^{\sqrt{(४अ^2 - य^2)}} २ \pi र \, तार \, ताय$$

$$+ \int_{0}^{अ} \int_{\sqrt{(४अ^2 - ४ अय)}}^{\sqrt{(४अ^2 - य^2)}} २ \pi र \, तार \, ताय$$

इसी जगह यदि य अक्ष के चारो ओर घलग के घूमने से जो घनक्षेत्र बने उसका घनफल अपेक्षित हो तो मान लो कि य अक्ष की धनात्मक दिशा नघ की ओर है तब न को मूल विन्दु मानने से लग का समीकरण $र^2 = ४ अ (अ + य)$ और लघ का $र^2 = ४ अ^2 - य^2$ यह होगा।

इस लिये अपेक्षित घनफल $= \int_{0}^{२अ} \int_{\sqrt{(४अ^2 - य^2)}}^{\sqrt{(४अ^2 + ४अय)}} २ \pi र \, तार \, ताय$

इसी स्थान में यदि पहले य के वश से चल अपेक्षित हो तो $लल_1$ रेखा से अभीष्ट क्षेत्र का दो विभाग कर देने से

घ = वृत्तखण्ड का घ फ + परवलयखण्ड का घ फ

$$= \int_{0}^{२ अ} \int_{\sqrt{(४अ^2 - र^2)}}^{२ अ} २ \pi र \, ताय \, तार$$

$$+ \int^{२ अ \sqrt{३}} \int_{\frac{र^2 - ४अ^2}{४अ}} २ \pi र \, ताय \, तार$$

१७३। यदि क्षेत्र र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो य, र को परस्पर बदल देने से ऊपर की युक्ति से सहज में सिद्ध हो जायगा कि $घ = \int \int २ \pi य \, ताय \, तार$ ।

१७४। किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ में एक प विन्दु और इस विन्दु के बहुत ही पास दूसरी व विन्दु लेकर दोनों विन्दुओं में लगा कर यल, रल धरातलों के समानान्तर दो दो धरातलों को बनावो तो घनक्षेत्र के भीतर एक आयत आधार के ऊपर समखात बन जायगा जिस के आधार का भुज य, कोटि र और वेध, ल होगा इस लिये समखात का घनफल $= ल \triangle य \triangle र$ । $\triangle य$, $\triangle र$ को बहुत छोटा मानने से समखात का घनफल = ल तार ताय, इस लिये समग्र घनफल = $\int \int ल \, तार \, ताय$ इस में पहले यदि $\int ल \, तार$ इस का मान निकालो तो स्पष्ट है

कि यह य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इसे यदि फ(य) के बराबर मान लो तो समग्र घनफल = $\int$ फ(य) ताय यही १६४वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुआ है।

इसी में यदि पहले $\int$ ल ताय इस का मान निकालो तो यह र अक्ष पर लम्ब रूप धरातल जो होगा उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इस लिये इस को यदि फ(र) कहो तो ऊपर की युक्ति से समग्र घनफल = $\int$ फ(र) तार। सर्वत्र सीमाओं का विचार कर घनफल निकालना चाहिये।

१७५। दैर्घ्यवृत्तीय घनक्षेत्र का अष्टमांश घनफल (जिस के पृष्ठ का समीकरण $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} + \frac{ल^२}{ग^२} = १$ यह है) जानना हो तो यहाँ

$$ल = ग\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}$$

इस लिये $घ = ग\int\int\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}$ तार ताय

यहाँ पहले $\int\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}$ तार $= क\int\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}\frac{तार}{क}$

$$= क\left\{\frac{र}{२क}\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)} + \frac{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)}{२}ज्या^{-१}\frac{र}{क\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)}}\right\}$$

इस में र = ० और $र = क\sqrt{१ - \frac{य^२}{अ^२}}$ के भीतर का चल

$= \frac{\pi क}{४}\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)$। इस लिये $घ = \int\frac{\pi\ क\ ग}{४}\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)$ ताय

$= \frac{\pi\ क\ ग}{४}\left[य - \frac{य^३}{३अ^२}\right]$ ० और अ के बीच य के मान में समग्र का $\frac{१}{८}$ घन·फल $= \frac{\pi क ग}{४}\left(अ - \frac{अ^३}{३अ^२}\right) = \frac{\pi क ग}{४}\cdot\frac{२अ}{३} = \frac{\pi अ क ग}{६}$ इस को ८ से गुण देने से सम्पूर्ण घनफल $= \frac{४\pi अकग}{३}$। यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।

१७६। जिसके पृष्ठ का समीकरण य र = अल है उस से यर धरातल से और जिन चारो धरातलों का क्रम से $य = य_१$, $य = य_२$, $र = र_१$, $र = र_२$ ये समी·करण हैं उन से बने हुए घनक्षेत्र का घनफल जानना है।

यहाँ १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$घ = \int_{य_1}^{य_2}\int_{र_1}^{र_2} \frac{यर}{अ} \text{ तार ताय} = \frac{1}{2अ}\int_{य_1}^{य_2} (र_2^2 — र_1^2)य \text{ ताय}$$

$$= \frac{1}{4अ} (र_2^2 — र_1^2)(य_2^2 — य_1^2)$$

$$= \frac{1}{4अ} (य_2 — य_1)(र_2 — र_1) \{ य_1र_1 + य_2र_2 + य_1र_2 + य_2र_1 \}$$

$$= \frac{1}{4} (य_2 — य_1)(र_2 — र_1)(ल_1 + ल_2 + ल_3 + ल_4)$$

जहाँ $ल_1$, $ल_2$, $ल_3$, $ल_4$ ये चारो कोनों के क्रम से शङ्कु हैं

यहाँ पर यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर सर्वत्र यर धन है।

१७७। जिस धरातल का समीकरण $ल = 0$, वृत्त का $(य—च)^2 + (र—ज)^2 = ग^2$ और घन के पृष्ठ का $य\ र = अ\ ल$ यह है उन से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना है।

यहाँ वृत्त के समीकरण से र की सीमा $ज—\sqrt{\{ग^2—(य—च)^2\}}$ और $ज + \sqrt{\{ग^2—(य—च)^2\}}$ ये होंगी इस लिये १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$घ = \int\int \frac{य\ र}{अ} \text{तार ताय} = \frac{1}{अ}\int\int \text{यर तार ताय}$$

$$= \frac{2ज}{अ}\int य\sqrt{\{ग^2—(य—च)^2\}} \text{ ताय}$$

जहाँ य की सीमा $च—ग$, $च+ग$, ये हैं

और $\frac{2ज}{अ}\int य\sqrt{\{ग^2—(य—च)^2\}} \text{ ताय} = \int (य-च)\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}} \text{ताय}$

$+ च \int \sqrt{\{ग^2—(य—च)^2\}}$ ताय यदि $य—च = त$ तो ऊपर का घनफल

$$= \frac{2ज}{अ}\int त\sqrt{\{ग^2—त^2\}} \text{ तात} + च\int \sqrt{\{ग^2-त^2\}} \text{तात}$$

यहाँ त की सीमा $—ग, +ग$ है इस लिये सीमाओं के भीतर ऊपर के चल का मान निकालने से अभीष्ट घनफल $= \frac{ज\ च\ ग^2 \pi}{अ}$,

यहाँ भी यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर यर धन है अर्थात् $(य—च)^2 + (र—ज)^2 = ग^2$ इस वृत्त का सब भाग प्रथम वा तृतीय पद में है ऐसा समझ कर तब ऊपर का घनफल निकाला गया है।

१७८। यदि घनक्षेत्र को ऐसे धरातलों से काटें जिस में शङ्कु मूल के

अक्षीय समीकरण के वश श्रुताश्रुताप यह आधार का फल हो तो समखात का फल लश्रुताश्रुताप यह होगा इस लिये घ = $\int$ लश्रुताश्रुताप । यहाँ श्रु^{2} = य^2 + र^2

जैसे जिस धरातल का ल = ०, और दो पृष्ठों का य^2 + र^2 = ४ अ ल,

र^2 = २ गय—य^2 ये समीकरण हैं उन से बने घनक्षेत्र का फल जानना है तो यहाँ $\frac{\text{श्रु}^2}{4\text{अ}}$ = ल और श्रु, प की ऐसी सीमा होगी जिस में चल का फैलाव र^2 = २ गय − य^2 इस वृत्त के संपूर्ण फल तक हो तो यहां श्रु$_1$ = २ ग कोज्याप ऐसा मानने से अभीष्ट घनफल

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\text{श्रु}_1} \frac{\text{श्रु}^3}{4\text{अ}} \text{ताश्रु ताप} = \frac{\text{ग}^4}{\text{अ}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^4\text{पताप}$$

$$= \frac{2\,\text{ग}^4}{\text{अ}} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi\,\text{ग}^4}{8\,\text{अ}} \text{(खण्डचलानयन से)}$$

१७९। जिस पृष्ठ का ल = अ इ$^{-\frac{\text{य}^2+\text{र}^2}{\text{ग}^2}}$ = अइ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ यह समीकरण है उस से और यर अक्ष से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना हो तो यहाँ पृष्ठ के समीकरण से स्पष्ट है कि मूल विन्दु से चारो ओर अनन्त दूर तक पृष्ठ फैला हुआ है इस लिये य की सीमा ०, और २ π होगी

और श्रु की ०, और ∞ होगी इस लिये घ = $\int\int$ अ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रुताश्रुताप

इस में $\int$ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रुताश्रु इस का मान = $-\frac{\text{इ}^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}}{2}$ ग^2 यह होगा

इस लिये $\int_0^{\infty}$ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रताश्रु = $\frac{\text{ग}^2}{2}$ और तब अभीष्ट घनफल का प्रमाण

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \int \text{अ इ}^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}}} \text{श्रुताश्रुताप} = \text{अ}\int_0^{2\pi} \frac{\text{ग}^2}{2} \text{ताय} = \frac{2\pi\text{अग}^2}{2} = \pi\text{अग}^2$$

१८०। १७४वें प्रक्रम में जो समखात का फल लतायतार यह निकाला है इसका ल अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उन से अनन्त विभाग कर डालें तो एक

विभाग वा समखात घनफल की तात्कालिकी गति = ताल तार ताय यह होगी इस लिये घनक्षेत्र के घनफल का मान त्रिगुण चलानयन की रीति से

$\int\int\int$ ताल तार ताय यह होगा।

१८१। जिस नलक का $य^2 + र^2 — २ अ य = ०$ यह समीकरण है उसके यदि उस खण्ड का घनफल जानना चाहते हो जो कि $ल = य स्पअ_1$, $ल = यस्पक_1$ इन धरातलों से नलक के कटने से उत्पन्न हुआ है तो यहाँ नलक के समीकरण से $र^2 = २ अ य — य^2 = र_1^2 \therefore र_1 = \sqrt{(२ अ य — य^2)}$

$$अब\ १८० प्रक्रम की युक्ति से\ घ = \int_0^{२अ}\int_{-र_1}^{र_1}\int_{य स्प अ_1}^{य स्प क_1} तालतारताय$$

$$= \int_0^{२अ}\int_{-र_1}^{र_1} (यस्पक_1 — यस्पअ_1) तार ताय$$

$$= \int_0^{२अ} (स्पक_1 - स्पअ_1)\ २य\sqrt{(२अय - य^2)} ताय$$

$$= २(स्पक_1 — स्पअ_1)\frac{\pi अ^2}{२}।$$

१८२। १७८वें प्रक्रम में समखात का आधार जिस का फल, श्रुता श्रुताष यह है उसे मान लो कि यर के धरातल में है अब इस आधार को स्थिररेखा अर्थात् य अक्ष के चारो ओर घुमावो तो स्पष्ट है कि इस आधार के घूमने से एक घनवलय होगा जिसका घनफल = $२\pi र श्रुताश्रुताष = २\pi$ श्रुज्याष श्रुताश्रुताष यह होगा और पूरा फेरा करने में आधार का धरातल यर धरातल से २π कोण उत्पन्न करेगा इस लिये बहुत पास पास के दो स्थानों में आधार के धरातल के आने में यर धरातल से उत्पन्न कोण का मान क्रम से $ष_1$, $ष_1 + ताष_1$ मानो तो घनवलय के घनफल का परमाल्प विभाग वा तात्कालिकी गति

= $ताष_1$ श्रुज्यायश्रुताश्रुताय = $श्रु^2$ज्याषताश्रुताषताष$_1$ इस लिये उचित सीमाओं के वश से सम्पूर्ण घनक्षेत्र का घनफल घ = $\int\int\int श्रु^2$ज्याष ताश्रुताषताष$_1$

जैसे जिस गोल का व्यासार्द्ध अ है उसके अष्टमांश का घनफल जानना है तो पहले $\int श्रु^2 ताश्रु = \frac{श्रु^3}{३}$ इस में ०, और अ के बीच श्रु के मान

में चल $=\dfrac{अ^३}{३}$

तब $घ = \int\int \dfrac{अ^३}{३}$ ज्याप$ता$प$ता$प$_१$

इस तरह से पहले र के वश चल ले आने से श्रु^{२}ज्याप श्रु प प$_१$

इन सब अवयवों का योग जो कि एक सूची के (जिसके आधार का फल = अ^{२}ज्याष ष ष$_१$ और वे = अ) समान है आया।

फिर ष के वश चल ज्ञान करने से

$$\int ज्याष\, ताप = -\, कोज्याप,$$

यहाँ ष की सीमा ० और $\frac{\pi}{२}$ मानने से

$$घ = \int \frac{अ^३}{३}\, ताप_१$$

इस तरह यहाँ प के वश चलानयन से $\dfrac{अ^३}{३}$ ज्याप $\triangle$प$\triangle$ष$_१$ इस चाल को ष$_१$ और ष + ष$_१$ के भीतर जितनी सूचियाँ हैं उनका योग आया।

फिर सब के पीछे ष$_१$ के वश से चल ज्ञान करने से और ष$_१$ की सीमा ० और $\frac{\pi}{२}$ मानने से गोल के अष्टमांश घनफल का मान = घ = $\dfrac{\pi अ^३}{६}$

१८३। एक समसूच्याकार शङ्कु का शिरःस्थान एक गोल के पृष्ठ पर है और शिरःस्थान से गोलगर्भ तक जो रेखा गई है वही शङ्कु का अक्ष है। गोल का व्यासार्द्ध अ और शङ्कु का शिरःकोणार्द्ध अ$_१$ है तो शङ्कु के आधार के गोल के पृष्ठ में लगने से शङ्कु पृष्ठ और गोल पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल जानना हो तो शङ्कु के शिरःस्थान को मूलविन्दु मानने से गोल-पृष्ठ का अक्षीयसमीकरण

श्रु = २अकोज्याष यह होगा। इस लिये अभीष्ट

$$घनफल = \int_0^{२\pi}\int_0^{अ_१}\int_0^{२अकोज्याय} श्रु^२ज्याषताश्रुताषताष_१$$

१८४। इसी प्रकार श्रु = अ(१ + कोज्याष) इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल।

$$घ = \int_0^{२\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{अ(१ + कोज्याष)} श्रु^२ज्याषताश्रुताषताष_१$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\text{अ}(१+\text{कोज्याष})} \text{श्रु}^2\text{ज्याष ताश्रुताष}_१ \text{ ताष}$$ (६३वें प्रक्रम से)

$$= \frac{2\pi \text{ अ}^3}{3}\int_0^{\pi} (१+\text{कोज्याष})^3 \text{ ज्याषताष}$$ इसका मान १२वें प्रक्रम के १५वें

उदाहरण से वा खण्डचलानयन से $\frac{\pi \, ८ \, \text{अ}^3}{३}$ यह होगा।

१८५। जिन दो घनक्षेत्रों के पृष्ठ का समीकरण (१) फ $\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}, \frac{\text{र}}{\text{क}}, \frac{\text{ल}}{\text{ग}}\right) = ०$

(२) फ(य, र, ल) = ० ये हों तो यदि

$\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \text{य}', \frac{\text{र}}{\text{क}} = \text{र}', \frac{\text{ल}}{\text{ग}} = \text{ल}'$ तो

$\therefore$ लतायतार = अकग ल' ताय' तार'

इस लिये १७४वें प्रक्रम से

(१) का घ $= \iint \text{लतायतार} = \iint \text{अकगल'ताय'तार'} = \text{अलक} \times$ (२)का घ।

जैसे दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण $\frac{\text{अ}^2\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{अ}^2\text{र}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{अ}^2\text{ल}^2}{\text{ग}^2} - \text{अ}^2 = ०$

और गोल का $\text{य}^2 + \text{र}^2 + \text{ल}^2 - \text{अ}^2 = ०$ यह है इस लिये

दैर्घवृत्तीयघनक्षेत्र का घनफल $= \frac{\text{अकग} \times}{\text{अअअ}}$ गोल का घनफल

$= \frac{४\pi\text{अ}^3 \times \text{अकग}}{३ \times \text{अ}^3} = \frac{४\pi\text{अकग}}{३}$ यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।

इस प्रकार से ऊपर कहे हुए सिद्धान्तों से सैकड़ों नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जिन के बल से बड़े बड़े कठिन प्रश्नों का उत्तर सहज में निकल सकता है। विद्यार्थियों को चाहिये कि जिस प्रश्न में जिस सिद्धान्त से सहज में उत्तर निकलने की आशा पाई जाय उसका उत्तर बड़ी सावधानी से उसी सिद्धान्त से निकालें। उत्तर निकालने में सीमाओं का विचार बड़ी सावधानी से करना चाहिये क्योंकि सीमा ही से तो क्षेत्र बँधा है और जब सीमा ही बिगड़ गई तो क्षेत्र ही दूसरा हो गया इस लिये जिस का फल अपेक्षित है उस का फल सीमाओं के बिगड़ जाने से कथमपि न निकलेगा। जहाँ कहीं सीमाओं में संशय जान पड़े वहाँ वक्र क्षेत्र की आकृति बनाकर सीमाओं का ज्ञान कर लो।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। जिस वक्र का $य र = अ^{२}$ यह समीकरण है उसके चाप के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या पृष्ठफल होगा ।

२। $र = \frac{क}{अ} इ^{\frac{य}{ग}}$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफल क्या होगा ।

३। चक्रालद यदि शिरःस्थानगतस्पर्शरेखा के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० $\frac{३२\pi क^{२}}{३}$

४। यदि चक्रालद अपने आधार के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा । उ० $\frac{६४\pi क^{२}}{३}$

५। त्रीतर (Tractory) य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल बतावो (९१वाँ प्रक्रम देखो) उ० $४\pi ग^{२}$

६। एक गोल को दो तुल्य समतलपरिधि रूप शङ्कु से (जो कि गर्भक्षितिज पर लम्ब है और जिन के आधार वृत्त का व्यास गोल के व्यासार्द्ध तुल्य हैं और जिन के अक्ष गोल के उन व्यसार्द्धों का सम द्विभाग करते हैं जिनके योग से गर्भक्षितिज का व्यास बनता है) आर पार छेद डाला तो अवशिष्ट गोल के भाग का पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० अवशिष्ट भाग का पृष्ठफल गोल व्यास के वर्ग का दूना होगा (१५२ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो। सीमा का विचार अच्छी तरह से करलो)

७। जिस वक्र का $र = अ \pm अ \, ला \frac{य}{अ}$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो $य = अ$, $य = अक$ इस के भीतर के खण्ड का क्या पृष्ठफल होगा ।

$$उ० \; ४\pi अ^{२} \left\{ \sqrt{(१ + क^{२})} - \sqrt{२} + ला \frac{क \, (१ + \sqrt{२})}{१ + \sqrt{(१ + क^{२})}} \right\}$$

८। जिस वक्र के समीकरण पर से $र^{२} ताय = -(अ^{२} - र^{२})^{\frac{१}{२}} रतार$ ऐसा सिद्ध हो य अक्ष के चारो ओर उसके घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा । उ० $२\pi अ^{२}$ ।

९। एक गोल को एक समतलमस्तकपरिधि रूप शङ्कु से छेद डाला तो छेदित प्रदेश का क्या पृष्ठफल होगा। इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि गोल की परिधि से शङ्कु की आधार परिधि आधी है और शङ्कु का एक पृष्ठसूत्र गोलगर्भ में होकर जाता है।

उत्तर, यदि गोल का व्यासार्द्ध = अ तो अभीष्ट पृष्ठफल = $२\pi अ^२ - ४अ^२$।

१०। एक गोल जिसका व्यासार्द्ध १५ हाथ है उन दो समानान्तर धरातलों से काटा गया केन्द्र से जिनका अन्तर क्रम से ३, ७ हाथ हैं तो धरातलों के बीच में जो गोलखण्ड है उसका पृष्ठफल क्या होगा।

उ० ३७६.९९०८ वर्ग हस्त।

११। पृथ्वी के पृष्ठ से कितनी ऊँचाई पर पृथ्वी के पृष्ठ भाग की तिहाई देख पड़ेगी। उ० पृथ्वी के व्यास के समान ऊँचाई पर।

१२। एक समसूच्याकार शङ्कु के भीतर एक गोल बना हुआ है गोल का व्यासार्द्ध त्रि और गोल के केन्द्र और शङ्क्वग्र का अन्तर (अ) है तो शङ्कु और गोल के पृष्ठफलों में क्या सम्बन्ध होगा। उ० $स = \frac{अ^२ - त्रि^२}{४अ\,त्रि}$

१३। अ, क गोल के व्यासार्द्ध क्रम से ३ और ४ हाथ हैं इन के पृष्ठफल के योग के समान ग गोल का पृष्ठफल है तो बतावो कि ग गोल का क्या व्यासार्द्ध होगा। उ० ५ हाथ

१४। यदि एक त्रिभुज जो कि य अक्ष के एकही ओर है य अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल कैसे निकालोगे। हर एक भुज को बढ़ाकर य अक्ष से मिला दो तो त्रिभुज के घूमने से वर्धित भुज भी घूमकर समसूची बनावेंगे फिर इन सूचियों के पृष्ठसूत्रों की सीमा तीनों भुज क्रम से कल्पना कर सूची खण्ड के पृष्ठफलों के योग से अभीष्ट पृष्ठफल जानलो।

१५। दो समानान्तर धरातलों के काटने से एक गोल खण्ड ऐसा उत्पन्न हुआ कि उसके मुखपरिधि का व्यासार्द्ध (अ) आधार परिधि का व्यासार्द्ध (क) और गोलखण्ड की ऊँचाई (उ) ठीक ठहरी तो उस गोलखण्ड का समग्र पृष्ठफल क्या होगा।

$$उ० \left[\pi\left\{२उ\sqrt{अ^२ + \left\{\frac{क^२ - अ^२ + उ^२}{२उ}\right\}^२} + क^२ + अ^२\right]$$

१६। $र = अ^2(क+य)$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घन-क्षेत्र बनाता है उसका घनफल सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi अ^2 (क+य)^3}{६} + स्थि \text{ यह होगा}$$

१७। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $र^2(य - अ क) = अ_1 य(य - गक)$ यह वक्र घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_2 - घ_1 = \pi अ_1 \left\{ \frac{य_2^2 - य_1^2}{२} + क(अ-ग)(य_2-य_1) + अक^2(अ-ग) ला \frac{य_2 - अक}{य_1 - अक} \right\}$$

१८। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $र^2 = \frac{अय(य-३अ)}{य-४अ}$ यह अक्ष घन-क्षेत्र बनावे तो ० और ३अ, य के मान में क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi अ^3}{२}$ (१५—१६ ला २)

१९। शिरः स्थानगत स्पर्श रेखा के चारो ओर घूमकर चक्रालद् जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा उ० $\pi^2 अ^3$।

२०। यदि आधार के चारो ओर चक्रालद् घूमे तो क्या घनफल होगा।

उ० $५\pi अ^3$

२१। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र

$र^2 = \frac{य^3}{२अ-य}$ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा। उ० $२\pi^2 अ^3$

२२। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र

$र^2 = \frac{४ अ^2 (२ अ - य)}{य}$ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा।

उ० $४\pi^2 अ^3$।

२३। जिस वक्र का $(र - क^2)^2 = १६अ^2 य$ यह समीकरण है वह र अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस में चारो ओर से घिरा हुआ जो भाग है उस का घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\pi क^5}{३१५अ^4}$

२४। जिस गोलखण्ड में मुखव्यासार्द्ध ($र_1$) आधार व्यासार्द्ध ($र_2$) ऊँचाई (वे) उसका घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\pi वे}{६}\left\{ वे^2 + ३(र_1^2 + र_2^2) \right\}$

२४। जिस वक्र का $र^2 = २ मय + नय^2$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_२ — घ_१ = \frac{\pi(य_२ — य_१)}{२}\left\{ र_२^२ + र_१^२ — \frac{१}{३}(य_२ — य_१)^२ \right\}$$

२५। एक समसूची (जिस का शिरःकोण ६०° है) के भीतर एक गोल है जो कि सूची के आधार और पृष्ठसूत्रों को स्पर्श करता है। यदि गोल का व्यासार्द्ध (त्रि) हो तो गोल और सूची से वने घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi\, त्रि^३}{६}$

२६। य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $श्रु^४ = अ^२(य^२ — र^२)$ यह वक्र बनाता है उस का क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi\, अ^३}{२}\left\{ \frac{१}{\sqrt{२}} ला\, (१ + \sqrt{२}) — \frac{१}{३} \right\}$

२७। जिस वक्र में $श्रु^४ = अ^२य^२ + क^२र^२$ हैं वह य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र वनाता है उस का घनफल निकालो।
इस में $अ > क$ समझो।

उ० $\frac{\pi}{६}(२\, अ^२ + ३\, क^२)अ + \frac{\pi\, क^४}{२\sqrt{(अ^२ - क^२)}}\, ला\, \frac{अ + \sqrt{(अ^२ — क^२)}}{क}$

२८। २७ वें प्रश्न में यदि अ = क तो घनक्षेत्र का क्या फल होगा।

उ० $\frac{४\,\pi\, अ^३}{३}$ ।

२९। २७ वें प्रश्न का वक्र यदि र अक्ष के चारो ओर घूमे तो घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi}{६}(२क^२ + ३अ^२)क + \frac{\pi\, अ^४}{२\sqrt{(अ^२ — क^२)}}\, ज्या^{-१} \frac{\sqrt{अ^२ — क^२}}{अ}$

३०। जिस के पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} + \frac{ल^४}{ग^४} = १$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{८\,\pi अकग}{५}$

३१। जिसके पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = २\, ल$ यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें ल = ग) से काटें तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० π अ क $ग^२$

३२। जिस के पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = \frac{२\, ल}{ग} - \frac{ल^२}{ग^२}$ यह समीकरण है उसे

यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें $ल = च$) से काटें तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा।

$$\text{उ०} \quad \pi \text{ अ क} \left\{ \frac{च^2}{ग} - \frac{च^3}{3ग^2} \right\}$$

३३। जिसके पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{ल}{ग}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ यह समीकरण है उसका प्रथम पद में जो खण्ड है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{अकग}{90}$

३४। जिस के पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ल}{ग}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{4 \pi \text{ अ क ग}}{35}$

३५। जिसके पृष्ठ का $(य^2 + र^2 + ल^2)^3 = 27अ^3यरल$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\pi अ^3}{2}$

(१८२ प्रक्रम देखो और श्रु का परमाधिक मान समीकरण को अक्षीय समीकरण में बदल $\frac{3अ}{2\sqrt[3]{2}}$ यह जान लो)

३६। जिस त्रिभुज के तीनों भुज क्रम से अ, क, ग हैं वह यदि ग भुज के चारो ओर घूमकर एक घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा।

यदि $स = \frac{अ+क+ग}{2}$ तो घनफल $= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}{ग}$

३७। जिसके पृष्ठ का $ल^न = अय^2 + कर^2$ यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल से काटें (जिस धरातल में $ल = ल_1$) तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi ल_1^{न+1}}{(न+1)\sqrt{अक}}$

३८। जिस वृत्त का व्यासार्द्ध अ है उस में एक पूर्णज्या केन्द्र से ग दूरी पर है इस के ऊपर का चाप इस पूर्णज्या के चारो ओर घूमकर यदि घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा। चाप को समझो कि परिधि के आधे से छोटा है और कोज्या$प_1 = \frac{ग}{अ}$। $प_1 =$ कोण का चापीयमान।

$$\text{उ०} \quad \text{अभीष्ट घनफल} = 2\pi \text{ अ} \left\{ \frac{(2अ^2 + ग^2)\text{ज्या}प_1}{3} - गप_1 \right\}$$

३९। य अक्ष पर जो पूर्णज्या (ग) लम्ब है उसके चारो ओर घूमकर यदि परवलय का चाप घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा।

उ० यदि पूर्णज्या के आधे पर जो लम्ब खड़ा हो वह जहाँ परवलय के चाप में लगे उसका मान पूर्णज्यार्द्ध विन्दु से क मानो तो घनफल = $\frac{८ \pi क^2 ग}{१५}$

४० एक गोल जिसका व्यासार्द्ध (अ) है एक धरातल से जो गोल गर्भ से द दूरी पर है काटा गया है। काटने से जो गोल में एक वृत्त वना उसे आधार मान दो समसूची वनाया जिसके वेध क्रम से, अ + द, अ − द हैं तो दोनों के घनफलों का क्या अन्तर होगा। उ० $\frac{२\pi द}{३}(अ^2 - द^2)$

४१। एक परवलय के य अक्ष पर केन्द्र कल्पना कर एक वृत्त वनाया तो यह वृत्त परवलय की एक शाखा में दो जगह जहाँ पर लगा उनके कोटियों का लम्ब रूपी अन्तर क ठहरा और यह वृत्त य अक्ष को दो जगह जहाँ काटा वे दोनों विन्दु परवलय के भीतर हैं। अब यदि परवलय और वृत्त दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूमें तो परवलय और वृत्त के सम्पातान्तर्गत परवलय चाप, और वृत्तचाप के वश से एक घनक्षेत्र होगा। वतावो इसके घनफल का क्या मान होगा। उ० $\frac{\pi क^3}{६}$

४२। जिस गोल का व्यासार्द्ध (अ) है उसे गोल गर्भ से (ग) अन्तर पर जो धरातल है उससे काट डाला। काटने से जो गोलार्द्ध से अल्प खण्ड है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi}{३}$ $(अ—ग)^2$ (२अ + ग)

४३। परवलय का $र^2 = ४ अय$ यह समीकरण है। य अक्ष में केन्द्र कल्पना कर परवलय के विन्दु का भु = ३ अ है उसे स्पर्श करते हुए एक वृत्तार्द्ध बनाया जिसके केन्द्र का अन्तर परवलय के शिरःस्थान से (४ अ) दूरी पर भुज की ओर है। यदि परवलय और वृत्तार्द्ध दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र वनावें तो गोलपृष्ठ और परवलय सम्बन्धी पृष्ठ के भीतर का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{१४}{३} अ^{3} \pi$

४४। लघुव्यासाग्र पर जो दीर्घवृत्त में स्पर्शरेखा है दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश उसके चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र वनाता है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi अ क^2}{६}(१०—३\pi)$

(जहाँ लघुव्यासार्द्ध = क, वृहद्व्यासार्द्ध = अ)

४५। एक गोले के नीचे ऊपर छेद कर उसके भीतर एक चोंगे को रख दिया तो यह चोंगा उसके भीतर चौचक बैठ गया यदि चोंगे की ऊँचाई (ग) हो तो चोंगे के पृष्ठ और गोल के पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi \text{ग}^3}{६}$

४६। किसी घनक्षेत्र में पृष्ठ के प विन्दु का मूल विन्दु से अन्तर श्रु हो और प विन्दुगत स्पर्शधरातल पर मूलविन्दु से लम्ब = श्रुकोज्याप और पृष्ठफल की तात्कालिकी गति = ताप़ृ तो सिद्ध करो कि

$$\text{घ} = \frac{१}{३}\int \text{श्रु कोज्याप ताप़ृ}$$

४७। जिस सूची के खण्ड में मुख परिधि का व्यासार्द्ध (त्रि$_१$) आधार-परिधि का व्यासार्द्ध (त्रि$_२$) और ऊँचाई (वे) है उस का घनफल क्या होगा।

उ० $\frac{\pi \text{वे}}{३}(\text{त्रि}_१^२ + \text{त्रि}_१\,\text{त्रि}_२ + \text{त्रि}_२^२)$

४८। समसूचियों का पृष्ठसूत्र (ग) स्थिर है। जिसका सब से अधिक घनफल है उसके शिरःकोण का क्या प्रमाण होगा। उ० कोज्या$^{-१}\frac{१}{\sqrt{३}}$

४९। एक समतलमस्तकपरिधिरूप शङ्कु के एक पृष्ठसूत्र को अक्ष मान एक समसूच्याकार शङ्कु बनाया। यदि दोनों शङ्कुओं का आधार (अ) और वेध (अ × उ) हो तो पहले शङ्कु से सूची के जो दो खण्ड होंगे उनके पृष्ठफल और घनफल क्या होंगे। उ० क्रम से खण्डों के

पृष्ठफल, $\frac{४\pi\sqrt{(१+\text{इ}^२)} - ३\sqrt{(३+३\text{इ}^२)}}{६}\text{अ}^२$, $\frac{२\pi\sqrt{(१+\text{इ}^२)} + ३\sqrt{(३+३\text{इ}^२)}}{६}\text{अ}^२$

और घनफल $\frac{८\pi + २७\sqrt{३} - ६४}{१८}\text{इअ}^३$, $\frac{६४ - २७\sqrt{३} - २\pi}{१८}\text{इअ}^३$,

५०। जिसके पृष्ठ का $\text{ल}^२ + \frac{\text{अ}^२\text{र}^२}{\text{य}^२} - \text{ग}^२ = ०$ यह समीकरण है उसे उन दो धरातलों से जिन में य = ०, य = अ है काटा तो दो धरातलों के अन्तर्गत खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi \text{ अ ग}^२}{२}$

५१। $य^{२} + र^{२} = गल$, $य^{२} + र^{२} = अय$, और $ल = ०$ इन तीनों पृष्ठों के अन्तर्गत घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{३\pi\, अ^{४}}{३२}$

(१७८वाँ प्रक्रम देखो)

५२। जिस पृष्ठ का $\frac{य^{२}}{अ^{४}} + \frac{र^{२}}{क^{४}} + \frac{ल^{२}}{ग^{४}} = १$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{४\pi\, अ^{२}क^{२}ग^{२}}{३}$

(१८५वाँ प्रक्रम देखो)

५३। एक पुजारी ने ठाकुर जी के सामने जलती धूपवत्ती खोंसने के लिये मट्टी की एक समसूची बना रक्खी थी। एक दिन एक धनी ठाकुर जी के दर्शन के लिये आया और चलती वेर उस समसूची के शिरे से आधार तक एक सूत से नापकर कहा कि देखो यह १० अङ्गुल का सूत हुआ इसे मैं याद रखने के लिये जेब में रख लेता हूँ तुम इस सूची को खूब खोखली कर किसी दिन मेरी कोठी में आवो तो मैं उसे सोने से भर दूँगा। प्रातःकाल पुजारी ने एक ज्यौतिषी से आकर निवेदन किया कि महाराज आप एक मट्टी की खोखली समसूची ऐसी वना दीजिये जिसके शिरे से आधार तक सर्वत्र दश अङ्गुल रहे और भीतर सोना भरने के लिये जगह भी खूब खुलासा रहे। ज्यौतिषी ने गणित द्वारा उसके आधार परिधि का मान निकाल पुजारी को वता दिया कि इसी परिधि पर दश अङ्गुल पृष्ठ सूत्र से किसी कोहार के द्वारा समसूची को वनालो। वतावो ज्यौतिषी ने आधार परिधि का क्या मान वतलाया था। उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{२२}{७}$ हो तो आधार परिधि $= \frac{४४}{७}\sqrt{\frac{२००}{३}} = ५१{\cdot}२९$

इति अष्टमाध्याय।

अथ नवमाध्याय।

सान्तचलानयन।

१८६। जिस तात्कालिक सम्बन्ध का साधारण रीति से अनन्त चल का ज्ञान हो जाता है उस में दोनों सीमाओं का उत्थापन देने से उस के सान्तचल का भी ज्ञान हो जाता है। इस लिये सान्तचल का मूल अनन्तचल ही ठहरा तथापि वहुत से स्थानों में अनन्तचल का रूप विना वनाये लाघव से सान्तचल का मान आ जाता है जैसा कि ५७वें प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखा आये हैं और वहुत से स्थानों में जहाँ अनन्तचल का मान ठीक ठीक नहीं जान सकते वहाँ भी इस सान्तचल के नियम से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं इस लिये इस अध्याय में कुछ सान्तचलानयन के प्रकार लिखे जाते हैं।

आज तक जितने सान्तचलों का ज्ञान हुआ है D. Bierens de Haan ने सब को एकट्ठा कर के सान्तचलसारणी Tables d' Integrales Definies के नाम से छपवा दिया है। जिन को इच्छा हो उसे देखें हम यहाँ पर कुछ रीतियों को दिखलाते हैं।

१८७। $\int_0^\pi$ ज्या मय ज्यानय ताय इस का मान जानना चाहते हैं। जहाँ म, न अभिन्न धनात्मक संख्या है और म $>$ न।

$$\text{यहाँ ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{कोज्या (म—न) य—कोज्या (म + न) य}}{२}$$

$$\text{इस लिये} \int \text{ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{ज्या (म—न)य}}{\text{२ (म—न)}} - \frac{\text{ज्या (म+न)य}}{\text{२(म+न)}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{और} \quad \int_0^\pi \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = ० \\ &\text{इसी प्रकार} \int_0^\pi \text{कोज्यामय कोज्यानय ताय} = ० \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (१)$$

यदि म = न और अभिन्न धनात्मक तो

$$\int \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = \int \text{ज्या}^२\text{नय ताय} = \int \frac{\text{(१-कोज्या २ नय)}}{२} \text{ताय}$$

$= \frac{य}{२} - \frac{ज्या २नय}{४न}$।

$\therefore \int_{०}^{\pi} ज्या^{२}नय = \frac{\pi}{२}$, इसी तरह $\int_{०}^{\pi} कोज्या^{२}नय = \frac{\pi}{२}$।

१८८। $\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म}य\ कोज्या^{न}य\ ताय$ इस का मान जानना है। जहाँ म और न अभिन्न धनात्मक संख्या हैं।

यहाँ ३५ वें प्रक्रम से

$$\int ज्या^{म}य\ कोज्या^{न}य\ ताय = \frac{कोज्या^{न-१}य\ ज्या^{म+१}य}{म+न} + \frac{न-१}{म+न}\int ज्या^{म}य\ कोज्या^{न-२}य\ ताय$$

$$वा \int ज्या^{म}य\ कोज्या^{न}य\ ताय = \frac{म-१}{म+न}\int ज्या^{म-२}य\ कोज्या^{न}य\ ताय - \frac{ज्या^{म-१}य\ कोज्या^{न+१}य}{म+न}$$

इस लिये दोनों पर से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म}य\ कोज्या^{न}य\ ताय = \frac{न-१}{म+न}\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म}य\ कोज्या^{न-२}य\ ताय$$

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म}य\ कोज्या^{न}य\ ताय = \frac{म-१}{म+न}\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म-२}य\ कोज्या^{न}य\ ताय।$$

इस लिये म और न में से कोई विषम हो तो सहज में सान्तचल विदित होगा म के स्थान में २ म + १ का उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२म+१}य कोज्या^{न}य\ ताय = \frac{२म}{२म+न+१}\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२म-१}य\ कोज्या^{न}य\ ताय$$

इस लिये वार बार क्रिया करने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२म+१}य\ कोज्या^{न}य\ ताय$$

$$= \frac{२म(२म-२)(२म-४)\ldots२}{(२म+न+१)(२म+न-१)\ldots(न+३)}\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्याय\quad कोज्या^{न}य\quad ताय$$

परन्तु $\int \text{ज्या य कोज्या}^{\text{न}}\text{य ताय}$

$$= -\frac{\text{कोज्या}^{\text{न}+१}\text{य}}{\text{न}+१} \quad \therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्याय कोज्या}^{\text{न}}\text{य ताय} = \frac{१}{\text{न}+१}$$

इस लिये

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}+१}\text{य कोज्या}^{\text{न}}\text{य ताय} = \frac{२.४.६....२\,\text{म}}{(\text{न}+१)(\text{न}+३)....(२\text{म}+\text{न}+१)} \quad \cdots\cdots (२)$$

इसी प्रकार न यदि विषम हो तो न के स्थान में २न + १ का उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}}\text{य कोज्या}^{२\text{न}+१}\text{य ताय} = \frac{२\text{न}}{\text{म}+२\text{न}+१}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}}\text{य कोज्या}^{२\text{न}-१}\text{य ताय}$$

$$= \frac{२\text{न}(२\text{न}-२).....२}{(\text{म}+२\text{न}+१)(\text{म}+२\text{न}-१)..(\text{म}+३)}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}}\text{य कोज्या य ताय}$$

$$= \frac{२.४.६\cdots२\,\text{न}}{(\text{म}+१)(\text{म}+३)....(\text{म}+२\text{न}+१)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (३)$$

इसी तरह

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{य कोज्या}^{२\text{न}}\text{य ताय} = \frac{२\text{न}-१}{२(\text{म}+\text{न})}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{य कोज्या}^{२\text{न}-२}\text{य ताय}$$

$$= \frac{१.३.५.\,.\,.\,.\,.\,.\,(२\text{न}-१)}{(२\text{म}+२)(२\text{म}+४)\,.\,.\,.\,(२\text{म}+२\text{न})}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{य ताय}$$

$$= \frac{१.३.५.\,.\,.\,.\,.\,.\,(२\text{न}-१)\,.\,१.३.५.\,.\,.\,.\,(२\text{म}-१)}{२.४.६\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(२\text{म}-२\text{न})}\,.\,\frac{\pi}{२}\,.\,.\,.\,.\,. \quad (४)$$

वहुत सान्तचलों का रूप ऊपर के आकार में ला सकते हो।

जैसे यदि य = स्पप

$$\text{तो} \int_{0}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(१+\text{य}^{२})^{\text{न}}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{कोज्या}^{२\text{न}-२}\text{प ताप} = \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{न}-२}\text{प ताप}$$

(४१) प्रक्रम के (४) समीकरण से)

$$= \frac{१.३.५....(२\text{न}-३)}{२.४.६...(२\text{न}-२)}\,\frac{\pi}{२}$$ (१२ वें प्रक्रम के (१५) उदाहरण से)

इसी तरह य = अ ज्याप मानने से

$$\int_{0}^{\text{अ}} \text{य}^{\text{न}}(\text{अ}^{२}-\text{य}^{२})^{\frac{\text{म}}{२}}\,\text{ताय} = \text{अ}^{\text{न}+\text{म}+१}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{प कोज्या}^{\text{म}+१}\text{प ताप}$$

और य = अ(१-कोज्याष) मानने से

$$\int_0^{अ}(२अय—य^2)^{\frac{म}{२}}\text{ ताय} = अ^{म+१}\int_0^{\frac{\pi}{२}}\text{ज्या}^{म+१}\text{ष ताष इत्यादि।}$$

१८९। $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{फ(य)}{फा(य)}$ ताय इस का मान जानना है जहाँ जानते हैं कि फा(य) में जो सब से बड़ा य का मान २न हो तो (फ)य में य का सब से बड़ा घात न—२ के समान वा २न—२ से छोटा है और फा(य) = ० इस में य का मान कोई सम्भाव्य संख्या नहीं है। इसलिये यहाँ स्पष्ट हो जायगा कि य के सम्भाव्य मान में $\frac{फ(य)}{फा(य)}$ यह अनन्त के तुल्य नहीं होगा।

मान लो कि फा(य) = ० इस में एक जोड़ा असम्भाव्य मान $अ_1 + क_1\sqrt{—१}$, $अ_1—क_1\sqrt{—१}$ ये हैं और १७वें प्रक्रम से $\frac{फ(य)}{फा(य)}$ इस का रूप खण्डभिन्नों में ले आवें तो इन दोनों मानों के वश से एक खण्ड—

भिन्न = $\frac{आ_1 + का_1\sqrt{—१}}{य—अ_1 + क_1\sqrt{—१}}$, दूसरा = $\frac{आ_1—का_1\sqrt{—१}}{य—अ_1—क_1\sqrt{—१}}$ है

इस लिये दोनों का योग = $\frac{२आ_न\ (य—अ_1) + २का_1क_1}{(य—अ_1)^2 + क_1^2}$

इस प्रकार से दो दो खण्ड भिन्नों का योग करने से

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{२आ_1(य-अ_1) + २का_1क_1}{(य-अ_1)^2 + क_1^2} + \frac{२आ_2\ (य—अ_2) + २का_2क_2}{(य—अ_2)^2 + क_2^2}$$

$$+ \cdot\cdot + \frac{२आ_न\ (य—अ_न) + २का_नक_न}{(य—अ_न)^2 + क_न^2}\cdot\cdot\cdot\cdot\ (१)$$

(जहाँ और दो दो असम्भाव्य मानों के वश से $आ_2$, $अ_2$, इत्यादि सिद्ध हुए हैं)

(१) में समच्छेद करने से स्पष्ट है कि दहने पक्ष में $य^{२न-१}$ का गुणक $२(आ_1 + आ_2 + आ_3 + \cdots + आ_न)$ यह होगा परन्तु बायें पक्ष में अर्थात् फ(य) में $य^{२न-१}$ का गुणक ० है क्योंकि मान लिया है कि फ(य) में सब से बड़ा य का घात २न-२ के समान वा २न-२ से छोटा है इस लिये सरूप समीकरण की विधि से $आ_1 + आ_2 + आ_3 + \cdots + आ_न = ०$।

(१) में एक खण्ड का चल साधारण रीति से

$$\int \frac{२आ_१(य—अ_१)ताय}{(य—अ_१)^२ + क_१^२} + \int \frac{२का_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = आ_१ला\left\{(य-अ_१)^२ + क_१^२\right\}$$

$$+ २का_१स्प^{-१} \int \left(\frac{य—अ_१}{क_१}\right)$$

इस लिये $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२का_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = २का_१ग$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य—अ_१)ताय}{(य—अ_१)^२ + क_१^२}$ इस में मान लो कि $\infty = \frac{१}{इ_१ए}$, $-\infty = \frac{—१}{इ_२ए}$

जहाँ ए = ०, अब आ$_१$ला $\{(य—अ_१)^२ + क_१^२\}$ इस में य के स्थान में क्रम से $\frac{१}{इ_१ए}, — \frac{१}{इ_२ए}$ का उत्थापन दे कर अन्तर करने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य—अ_१)\ ताय}{(य—अ_१)^२क + ^२_१} = आ_१\Big[ला\left\{\left(\frac{१}{इ_१ए} -अ_१\right)^२ - क_१^२\right\}$$

$$—ला\left\{\left(— \frac{१}{इ_२ए} —अ_१\right)^२ + क_१^२\right\}\Big]$$

$$= आ_१\Big[ला\left\{\frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{इ_१^२ए^२}\right\}$$

$$—ला\left\{\frac{(१ + इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२}{इ_२^२ए^२}\right\}\Big]$$

$$= आ_१ला\left\{\frac{इ_२^२}{इ_१^२} \cdot \frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{(१ + इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२}\right\} = आ_१ला\left[\frac{इ_२^२}{इ_१^२}\right]$$

$= २आ_१ला \frac{इ_२}{इ_१}$, ए का मान शून्य मानने से।

इस प्रकार से (१) में एक खण्डभिन्न सम्बन्धि $\infty, —\infty$ सीमाओं के भीतर का मान $= २आ_१ला \frac{इ_२}{इ_१} + २का_१ग$ यह सिद्ध हुआ।

इसी तरह (१) के सब खण्डभिन्नों के $= \infty, —\infty$ सीमाओं के भीतर सान्त-चलों का मान ले आ कर योग कर देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)} ताय = २\ (आ_१ + आ_२ + \cdots + आ_न)\ ला\left[\frac{इ_२}{इ_१}\right]$$

$$+ २\pi(का_१ + का_२ + \cdots + का_न)$$
$$= २\pi(का_१ + का_२ + \cdots + का_न \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (२)$$

१९०। ऊपर के प्रक्रम संबंधि एक उदाहरण अत्यन्त चमत्कृत दिखाते हैं। मानो कि $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{य^{२म} ताय}{१+य^{२न}}$ इस का मान जानना है जहाँ न और म धन अभिन्न संख्या है और $न > म$ यहाँ मानो कि $य^{२न}+१=०$ इस में एक मान $\acute{अ}$ है तो २५वें प्रक्रम से $आ_१ — का_१\sqrt{—१} = — \frac{\acute{अ}^{२म+१}}{२न}$ और चलनकलन के ३१७वें प्रक्रम से $\acute{अ}$, $कोज्या \frac{२क+१}{२न} \pi + \sqrt{—१}\ ज्या \frac{२क+१}{२न} \pi$ इस चाल का होगा जिस में क कोई धन संख्या न से छोटी है।

इस लिये $\acute{अ}^{२म+१} = (कोज्या \frac{२क+१}{२न} \pi + \sqrt{—१}\ ज्या \frac{२क+१}{२न} \pi)^{२म+१}$

$$= कोज्या \frac{२क+१}{२न} (२म+१)\pi + \sqrt{—१}\ ज्या \frac{२क+१}{२न} (२म+१)\pi$$

$$= कोज्या\ (२क+१)\ ष + \sqrt{—१}\ ज्या (२क+१) ष,\ यदि\ \frac{(२म+१)\pi}{२न} = ष$$

इस लिये असम्भाव्य और सम्भाव्य को समान करने से

$आ_१ — का_१\sqrt{-१} = — \frac{कोज्या(२क+१)ष}{२न} — \frac{\sqrt{—१} ज्या(२क+१)ष}{२न}$ इस में

$का_१ = \frac{ज्या(२क+१)ष}{२न}$, क के स्थान में ०, १, २, · · · · · · · · · न − १ का उत्थापन देकर योग करने से

$$का_१ + का_२ \cdot\cdot\cdot + का_न$$
$$= \frac{१}{२न} \{ ज्याष + ज्या३ष + ज्या५ष \cdot\cdot\cdot + ज्या(२न—१)ष \}$$

इस में यदि $स = ज्याष + ज्या\ ३ष + \cdot\cdot\cdot + ज्या\ (२न—१)ष$

तो $२\ स\ ज्याष = २ज्या^२ष + २ज्याषज्या३ष + \cdots + २ज्याषज्या\ (२न-१)ष$

$$= १—कोज्या२ष + कोज्या२ष—कोज्या४ष + \cdots$$
$$+ कोज्या\ (२न—२)\ ष—कोज्या२नष$$
$$= १—कोज्या२नष = २ज्या^२नष = २ज्या^२\ (२म+१)\ \frac{\pi}{२} = २$$

इस लिये $ष = \frac{१}{ज्याष} = \frac{१}{ज्या\ \frac{२ग+१}{२न\pi}}$।

इसका उत्थापन ऊपर के मान में देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{य^{२म} ताय}{१+य^{२न}} = \frac{१}{२न} \frac{२\ \pi}{ज्या\ \frac{२म+१}{२न}\pi} = \frac{\pi}{न\ ज्या\ \frac{२म+१}{२न}\pi}$$

$$= २\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१+य^{२न}} \text{ ताय}$$ (चतुर्थाध्यायके (१) अभ्यासार्थ प्रश्न से)

इस लिये $\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१+य^{२न}} \text{ ताय} = \frac{\pi}{२न} \cdot \frac{१}{ज्या \frac{२म+१}{२न}\pi}$

१९१। $\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१—य^{२न}}$ ताय इस का मान जानना है जहाँ न $>$ म और दोनों धनात्मक अभिन्न संख्या हैं।

इस के जानने के लिये पहले दिखलाते हैं कि

$$\int_{०}^{\infty} \frac{ताय}{१—य^{२}} = ०$$

क्योंकि $\int_{०}^{\infty} \frac{ताय}{१—य^{२}} = \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१—य^{२}} + \int_{१}^{\infty} \frac{ताय}{१—य^{२}}$ (४१प्रक्रम के (१)समीकरण से)

परन्तु यदि य $= \frac{१}{र}$ तो $\int_{१}^{\infty} \frac{ताय}{१—य} = \int_{०}^{१} \frac{तार}{१—र^{२}} = -\int_{०}^{१} \frac{तार}{१—र^{२}} = -\int_{०}^{१} \frac{ताय}{१-य^{२}}$

(४१ प्रक्रम के (३) समीकरण की कल्पना से)

इसका उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\infty} \int \frac{ताय}{१—य^{२}} = \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१-य^{२}} + \int_{१}^{\infty} \frac{ताय}{१—य^{२}} = \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१-य^{२}} - \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१-य^{२}} = ०$$

यह सिद्ध हुआ।

अव $\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म} \text{ ताय}}{१—य^{२न}}$ इस में स्पष्ट है कि $१—य^{२न} = ०$ इस में दो सम्भाव्य मान य के आवेंगे एक $+१$ दूसरा $—१$ इस लिये खण्डभिन्नों में $+१, —१$ इन दोनों मान के वश से जो दो भिन्न होंगे उन का योग $= \frac{१}{न(१-य^{२})}$ यह होगा। इस लिये ऊपर की युक्ति से

$\frac{१}{न}\int_{०}^{\infty} \frac{ताय}{१-य^{२}} = ०$। बाकी खण्डभिन्नों में न—१ जोड़े असम्भाव्य मान होंगे इस लिये

$$\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}\text{ताय}}{१—य^{२न}} = २\,\pi\,(का_{१} + का_{२} + \cdots + का_{न+१})$$

यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{का}_1+\text{का}_2+\cdots+\text{का}_{\text{न}-1}=\frac{1}{2\text{न}}\{\text{ज्या}2\text{प}+\text{ज्या }4\text{प}+\cdots+\text{ज्या }2(\text{न}-1)\text{प}\}$$

जहाँ पहले के ऐसा $\text{प}=\frac{(2\text{म}+1)}{2\text{न}}\pi$

यहाँ पर भी सरलत्रिकोणमिति की युक्ति से सब जीवाओं के योग का मान $=\dfrac{\text{कोज्याप}-\text{कोज्या}(2\text{न}-1)\text{प}}{2\text{ज्याप}}=\text{कोस्प}\;\frac{(2\text{म}+1)\pi}{2\text{न}}$

इस लिये $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\text{य}^{2\text{म}}\text{ताय}}{1-\text{य}^{2\text{न}}}=\frac{\pi}{2\text{न}}\text{कोस्प}\frac{2\text{म}+1}{2\text{न}}\pi$।

इस में और ऊपर के प्रक्रम में यदि $\text{य}^{2\text{न}}=\text{ल}$ और $\text{अ}=\frac{2\text{म}+1}{2\text{न}}$ तो

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{\text{य}^{2\text{म}}\text{ताय}}{1+\text{य}^{2\text{न}}}=\int_0^\infty\frac{\text{ल}^{\text{अ}-1}\text{ताल}}{1+\text{ल}}=\frac{\pi}{\text{ज्याअ}\pi}\text{।}\\ \text{और }&\int_0^\infty\frac{\text{य}^{2\text{म}}\text{ताय}}{1-\text{य}^{2\text{न}}}=\int_0^\infty\frac{\text{ल}^{\text{अ}-1}\text{ ताल}}{1-\text{ल}}=\pi\text{कोस्प अ}\pi\end{aligned}\right\}\cdots\quad(1)$$

यहाँ म, और न के वश से सिद्ध कर सकते हो कि अ सर्वदा धनात्मक और १ से अल्प है।

१९२। ऊपर के दो प्रक्रमों में जो दो सान्तचल आये हैं उनके बल से अनेक रूपान्तर बना सकते हो। जैसे ऊपर के प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि $\text{ह}=\text{ल}^{\text{अ}}$ तो

$$\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1+\text{ह}^{\frac{1}{\text{अ}}}}=\frac{\text{अ}\pi}{\text{ज्याअ}\pi},\quad\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1-\text{ह}^{\frac{1}{\text{अ}}}}=\text{अ}\pi\text{कोस्प अ}\pi$$

इन में $\text{त}=\frac{1}{\text{अ}}$ मानने से

$$\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1+\text{ह}^{\text{त}}}=\frac{\pi}{\text{तज्या}\frac{\pi}{\text{त}}},\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1-\text{ह}^{\text{त}}}=\frac{\pi}{\text{त}}\text{कोस्प}\frac{\pi}{\text{त}}\cdots(1)$$

जहाँ त धन और १ से अधिक है।

$$\text{और}\int_0^\infty\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}=\int_0^1\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ ताय}}{1+\text{य}^2}+\int_1^\infty\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}$$

$$\text{परन्तु यदि }\text{य}=\frac{1}{\text{ल}}\text{ तो}\int_1^\infty\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}=\int_1^0-\frac{\text{ल}^{-\text{न}}\text{ताल}}{1+\text{ल}^2}=\int_0^1\frac{\text{य}^{-\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}$$

$$\therefore \int_{0}^{\infty} \frac{य^{न} ताय}{१ + य^{२}} = \int_{0}^{१} \frac{य^{न} + य^{-न}}{१ + य^{२}} ताय । \cdots\cdots \quad (२)$$

और १९० प्रक्रम के सान्तचल में यदि न = १, और २ म = न ∠ १ मान लें तो $\int_{0}^{\infty} \frac{य^{न} ताय}{१ + य^{२}} = \frac{\pi}{२ \text{ को ज्या } \frac{न\pi}{२}} \cdots\cdots\cdots \quad (३)$

(३) से (२) का मान

$$= \frac{\pi}{२ \text{ कोज्या} \frac{न\pi}{२}} = \int_{0}^{१} \frac{य^{न} + य^{-न}}{१ + य^{२}} ताय = \int_{0}^{१} \frac{य^{न} + य^{-न}}{य + य^{-१}} \cdot \frac{ताय}{य} \cdots (४)$$

इसी तरह

$$\frac{\pi}{२} स्प \frac{न\pi}{१} = \int_{0}^{\infty} \frac{य^{न} ताय}{१ — य^{२}} = \int_{0}^{१} \frac{य^{न} — य^{-न}}{य — य^{-१}} \cdot \frac{ताय}{य} \cdots (५)$$

सर्वत्र समझो कि न ∠ १ है

(४) और (५)वें में यदि $य = इ^{-\pi ल}$ और $अ = न\pi$ तो

$$\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{अल} + इ^{-अल}}{इ^{\pi ल} + इ^{-\pi ल}} ताल = \frac{छे\frac{अ}{२}}{२} । \int_{0}^{\infty} \frac{इ^{अल} - इ^{-अल}}{इ^{\pi ल} - इ^{-\pi ल}} ताल = \frac{स्प \frac{अ}{२}}{२}, \cdots (६)$$

इस तरह से सैकड़ों रूपान्तर कर सकते हो।

१९३। इस सान्तचलानयन की विधि से फल में चाहे जिस वर्ण को स्वतन्त्र मान उसके वश से चाहे जौन सा तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हैं।

जैसे $\int_{अ}^{क} फ(य) ताय$ इस का तात्कालिक सम्बन्ध क को स्वतन्त्र मान उस के वश से निकालना है जहाँ यह जानते हैं कि फ(य) में क नहीं है और क और अ यहाँ यदि $\int फ(य) ताय = फा(य) + स्थि,$

तो $\int_{अ}^{क} फ(य) ताय = फा(क) — फा(अ)$ दोनों परस्पर स्वतन्त्र हैं।

इस लिये $\frac{तास}{ताक} = \frac{ता}{ताक} \{ फा(क - फा अ) \} = \frac{ताफा(क)}{ता क} = फ(क)$ यह बड़े लाघव से सिद्ध हो जाता है इसके लिये यूरप के लोगों की कल्पना जो टाड् हण्टर इत्यादिकों ने लिखी है सो दिखाते हैं।

कल्पना करो कि $स = \int_{अ}^{क} फ़(य)ताय$

और १ जब बदल के क + △क हुआ तब स का मान स + △स हुआ ।

इस लिये $स + △स = \int_{अ}^{क+△क} फ(य)\, ताय$

इस लिये $△स = \int^{क+△क} फ(य)ताय - \int_{अ}^{क} फ(य)\, ताय$

$= \int_{अ}^{क+△क}$ फ(य)ताय (४१) प्रक्रम के (१) (समीकरण से)

परन्तु ४०वें प्रक्रम से

$\int_{क}^{क+△क} फ(य)ताय = △क\, फ(क + प△क)$

जहां प कोई १ से अल्प भिन्नाङ्क है ।

इस तरह से $\frac{△स}{△क} = फ(क + प△क)$, △ क का, मान शून्य मानने से

$$\left.\begin{aligned} \frac{तास}{ताक} &= फ(क) \\ \text{और}\quad \frac{ता^{न}स}{ताक^{न}} &= फ^{(न-१)}(क) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (१)$$

इसी तरह अ को स्वतन्त्र मानने से यदि फ (य) में अ न हो और अ,क परस्पर स्वतन्त्र हों तो $\frac{तास}{ताअ} = -फ(अ)$

और $\frac{ता^{न}स}{ताअ^{न}} = -फ^{(न-१)}(अ)$ ………………………… (२)

१९४ । $स = \int_{अ}^{क} फ\,(य,ग)ताय$ यहां पर ग को स्वतन्त्र मानने से $\frac{तास}{ताग}$ का मान जानना है जहां अ और क दोनों ग की अपेक्षा स्वतन्त्र है ।

यहां $स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग)\, ताय$

इस लिये $स + △स = \int_{अ}^{क} फ(य,\, ग + △ग)\, ताय$

और $△स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग + △ग)\, ताय - \int_{अ}^{क} फ(य,\, ग)ताय$

$$= \int_{अ}^{क} \{ फ(य,ग + \triangle ग) — फ(य,ग) \} ताय$$

इस लिये $$\frac{\triangle स}{\triangle ग} = \int_{अ}^{क} \left\{ \frac{फ(य,ग + \triangle ग) - फ(य,ग)}{\triangle ग} \right\} ताय$$

$\triangle ग$ को शून्य मानने से तात्कालिक सम्बन्ध के धर्म से

$$\frac{तास}{ताग} \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य, ग)}{ताग} ताय$$

इसमें इतना समझ लो कि अ, वा क दोनों में से कोई अनन्त के तुल्य नहीं हैं। क्योंकि चलनकलन की युक्ति से

$\frac{फ(य,ग + \triangle ग) — फ(य,ग)}{\triangle ग} = \frac{ताफ(य,ग)}{ताग} + इ_1$ ऐसा होगा।

जहां $\triangle ग$ को शून्य मानने से $इ_1$ भी शून्य हो जायगा।

इस लिये $$\frac{\triangle स}{\triangle ग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य, ग)}{ताग} ताय + \int_{अ}^{क} इ_1 \; ताय$$

अब यहां प्रत्यक्ष देख पड़ता है कि ग को शून्य मानने से यदि क, और अ अनन्त न हों तो $\int_{अ}^{क} इ_1$ ताय यह शून्य के तुल्य हो जायगा।

$$\left.\begin{aligned} &अब जब \; \frac{तास}{ताग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताफ (य, ग)}{ताग} ताय \\ &इसलिये \; \frac{ता^{न} स}{ताग^{न}} = \int_{अ}^{क} \frac{ता^{न} फ (य, ग)}{ताग^{न}} ताय \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (१)$$

कल्पना करो कि (१) में $\int फ (य, ग) ताय = फा (य, ग)$

और $$\int \frac{ताफा (य, ग)}{ताग} ताय = फि (य, ग)$$

तो $$\frac{तास}{ताग} = \frac{ताफा (क, ग)}{ताग} — \frac{ताफा (अ, ग)}{ताग} = फि (क, ग) — फि(अ,ग) \; (२)$$

इसमें मानो कि फ (य, ग) में क नहीं है और अ, क से स्वतन्त्र है तो

(२) से $$\frac{ता फा (क, ग)}{ताग} + फि (अ,ग) — \frac{ता फा (अ, ग)}{ताग} = \frac{ता फा(क, ग)}{ताग} + स्थि$$

$$= फि (क, ग) \ldots\ldots (३)$$

जहां फि (अ, ग)— $\frac{\text{ता फा (अ, ग)}}{\text{ताग}}$ = स्थि = क में स्वतन्त्र स्थिराङ्क।

अब (३) में चाहे क के स्थान में जो उत्थापन दो समीकरण ठीक ही रहेगा मान लो कि क के स्थान में य को रख दिया तो

$$\frac{\text{ता फा (य, ग)}}{\text{ताग}} + \text{स्थि} = \text{फि (य, ग)} \ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

(४) में यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें और फा (य, ग) और फि (य,ग) के स्थान में इनका पहला मान रख दें तो

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int \text{फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ता फ (य, ग)}}{\text{ताग}}\text{ताय} \ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

(५) वें से एक के चलज्ञान से दूसरे का चलज्ञान सहज में हो सकता है जैसे

यदि $\text{फ (य, ग)} = \frac{१}{१ + \text{ग}^२\text{य}^२}$ तो $\text{फ (य, ग)ताय} = \int \frac{\text{ताय}}{१ + \text{ग}^२\text{य}^२} = \frac{१}{\text{ग}}\text{स्प}^{-१}\text{गय}$

और $\frac{\text{ताफा (य,ग)}}{\text{ताग}} = -\frac{२\ \text{गय}^२}{(१ + \text{ग}^२\text{य}^२)^२}$, $\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int \text{फ (य, ग)ताय} = \frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\left(\frac{१}{\text{ग}}\ \text{स्प}^{-१}\text{गय}\right)$

$= \frac{१}{\text{ग}}\ \frac{\text{ता}}{\text{ताग}}(\text{स्प}^{-१}\text{गय}) = \frac{१}{\text{ग}} \cdot \frac{\text{य}}{१ + \text{ग}^२\text{य}^२}$

इस लिये (५)वें से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int \text{फ (य, ग) ताय} = \frac{१}{\text{ग}}\ \frac{\text{य}}{१ + \text{ग}^२\text{य}^२} = \int \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}}\text{ताय} = -\int \frac{२\text{गय}^२\text{ताय}}{(१ + \text{ग}^२\text{य}^२)^२}$$

देखो यहां $\int \text{फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ताय}}{१ + \text{ग}^२\text{य}^२}$ इसके ज्ञान से तात्कालिक सम्बन्ध पर से इससे अधिक कठिन का— $\int \frac{२\text{गय}^२\text{ताय}}{(१ + \text{ग}^२\text{य}^२)^२}$ इसका ज्ञान सहज में हो गया।

१९५। यदि $\text{स} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ (य, ग) ताय}$ इसमें यदि क, और अ दोनों ग के फल हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान जानना।

यहां स्पष्ट है कि तीन चलराशि के वश से अर्थात् अ, क, ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकलेगा। इस लिये चलनकलन के प्रक्रम से और ऊपर के प्रक्रमों से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}}\text{ताय} + \frac{\text{तास}}{\text{ताक}} \cdot \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} + \frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} \cdot \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$

$$= \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ताफ}(\text{य}, \text{ग})}{\text{ताग}} \text{ताय} + \text{फ}(\text{क}, \text{ग}) \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} - \text{फ}(\text{अ}, \text{ग}) \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह से

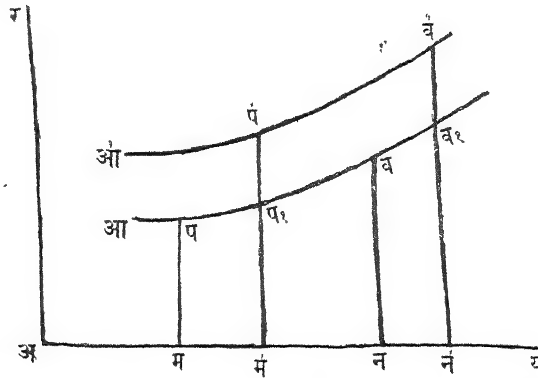
$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताग}^{२}} = \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ता}^{२}\text{फ}(\text{य}, \text{ग})}{\text{ताग}^{२}} \text{ताय}$$

$$+ \text{फ}(\text{क}, \text{ग}) \frac{\text{ता}^{२}\text{क}}{\text{ताग}^{२}} + \frac{\text{ताफ}(\text{क}, \text{ग})}{\text{ताक}} \left\{\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}\right\}^{२} + २ \frac{\text{ताफ}(\text{क}, \text{ग})}{\text{ताग}} \cdot \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}$$

$$- \text{फ}(\text{अ}, \text{ग}) \frac{\text{ता}^{२}\text{अ}}{\text{ताग}^{२}} - \frac{\text{ताफ}(\text{अ}, \text{ग})}{\text{ताअ}} \left\{\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}\right\}^{२} - २ \frac{\text{ताफ}(\text{अ}, \text{ग})}{\text{ताग}} \cdot \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह $\frac{\text{ता}^{३}\text{स}}{\text{ताग}^{३}}$ इसका और इससे अधिक का भी मान जान सकते हो।

१९६। १९५ प्रक्रम में जो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ इसका मान दिखलाया है उसे क्षेत्र की रीति से भी दिखा सकते हो।



मान लो कि आपव वक्र का समीकरण र = फ(य,ग) और आंपंवं का समीकरण र = फ(य,ग + △ग) यह है और मानो कि

अम = अ, अ न = क, म मं = △ अ, न नं = △क तो स, पमनव का और स + △स पमंनंवं का क्षेत्रफल होगा। इसलिये

$$\triangle\text{स} = \text{पंप}_{१}\text{व}_{१}\text{वं} + \text{वननंव}_{१} - \text{पममंप}_{१}$$

$$\text{और } \frac{\triangle\text{स}}{\triangle\text{ग}} = \frac{\text{पंप}_{१}\text{व}_{१}\text{वं}}{\triangle\text{ग}} + \frac{\text{वननंव}_{१}}{\triangle\text{ग}} - \frac{\text{पममंप}_{१}}{\triangle\text{ग}}।$$

इस में मनं का मान यदि परमाल्प अर्थात् ताय के तुल्य हो तो

$$\frac{\text{पंप}_{१}\text{व}_{१}\text{वं}}{\text{ग}} = \frac{\text{फ}(\text{य}, \text{ग} + \triangle) - \text{फय}, \text{ग})}{\text{ग}\triangle} \text{ताय}, \quad \frac{\text{वननंव}_{१}}{\triangle\text{ग}} = \text{फ}(\text{क}, \text{ग}) \frac{\triangle\text{क},}{\triangle\text{ग},}$$

और $\frac{\text{प म म}' \text{प}_1}{\triangle \text{ग}} = \text{फ}(\text{अ, ग}) \frac{\triangle \text{अ}}{\triangle \text{ग,}}$। इस पर से $\triangle$ग के स्थान में ताग मानने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \frac{\text{ताफ(य,ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} + \text{फ(क,ग)}\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} - \text{फ(अ, ग)}\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

यही १९५ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था।

१९७। ऊपर के प्रक्रमों में जो सिद्धान्त दिखलाये हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) उस वक्र को जानना है जिस में चाप, य अक्ष, और कोटि से बने क्षेत्र का फल भुजकोटि के घात से न गुणित हो। जहाँ न कोई स्थिराङ्क है। मानो कि वक्र का समीकरण र = फ(य) है तो फलानयन की विधि से

$\int_0^{\text{ग}} \text{फ(य) ताय}$ यह उस खण्ड का फल होगा जो वक्रचाप, य अक्ष, और उस कोटि से जिस में भु = ग, है बना है इस लिये प्रश्न के आलाप से

$\text{स} = \int_0^{\text{ग}} \text{फ(य) ताय} = \frac{\text{गफ(ग)}}{\text{न}}$ यह स्थिति चाहे ग का मान जो हो सर्वत्र रहेगी इस लिये ग के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से १९३ प्रक्रम के (१) समीकरण से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \text{फ(ग)} = \frac{\text{फ(ग)} + \text{गफ}'\text{(ग)}}{\text{न}}$

इस लिये $(\text{न} - १)\ \text{फ(ग)} = \text{गफ}'\text{(ग)}$

और $\quad \frac{\text{फ}'\text{(ग)}}{\text{फ(ग)}} = \frac{\text{न} - १}{\text{ग}}$

चलानयन से $\text{ला फ(ग)} = (\text{न} - १)\ \text{लाग} + \text{स्थि}$

अर्थात् $\text{फ(ग)} = \text{आग}^{\text{न}-१}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।

ग के स्थान में य को रख देने से अभीष्ट वक्र का समीकरण

$\text{फ(य)} = \text{आय}^{\text{न}-१}$ यह हुआ।

(२) जिस वक्र का र = फ(य) यह समीकरण है उसमें यह जानते हैं कि ग के सब मान में

$\frac{\int_0^{\text{ग}} \text{य} \{\text{फ(य)}\}^२ \text{ताय}}{\int_0^{\text{ग}} \{\text{फ(य)}\}^२ \text{ताय}} = \frac{\text{ग}}{\text{न}}$ यह स्थिति है तो फ(य) का स्वरूप कैसा होगा।

यहां प्रश्न के अनुसार छेदगम कर देने से

$$\int_0^{ग} य \{ फ(य) \}^२ ताय = \frac{ग}{न} \int_0^{ग} \{ फ(य) \}^२ ताय$$ ऐसा होगा ।

ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$ग \{ फ(य) \}^२ = \frac{१}{न} \int_0^{ग} \{ फ(य) \}^२ ताय + \frac{ग}{न} \{ फ(ग) \}^२$$

समशोधन से $ग(१ - \frac{१}{न}) \{ फ(ग) \}^२ = \frac{१}{न} \int_0^{ग} \{ फ(य) \}^२ ताय$

इस का ग के वश से फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$(१ - \frac{१}{न} \{ फ(ग) \}^२ + २ ग(१ - \frac{१}{न}) फ(ग) फ'(ग) = \frac{\{ फ(ग) \}^२}{न},$$ फ(ग)

का भाग दे कर समशोधन से $(१ - \frac{१}{न}) फ(ग) + २ग(१ - \frac{१}{न}) फ'(ग) = ०$

इस लिये $\frac{फ'(ग)}{फ(ग)} = \frac{२ - न}{२(न-१)} \frac{१}{ग}$, चलानयन करने से

$$लाफ(ग) = \frac{२ - न}{२(न-१)} लाग + स्थि ।$$

इस लिये $फ(ग) = आ ग^{\frac{२-न}{२(न-१)}}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है ।

इस तरह से $फ(य) = आ य^{\frac{२-न}{२(न-१)}}$ यह सिद्ध हुआ ।

यह उदाहरण स्थिति विद्या में एक चमत्कार कारक है ।

(३) फ(य) का ऐसा स्वरूप जानना है जिसमें $\int_0^{म} \frac{फ(य)ताय}{\sqrt{(ग-य)}}$ यह ग से स्वतन्त्र हो जहां जानते हैं कि ग से फ(य) स्वतन्त्र है ।

यहां मानलो कि य = गल तो

$$स = \int_0^{ग} \frac{फ(य)ताय}{\sqrt{(ग-य)}} = \int_0^{१} \frac{\sqrt{ग}\, फ(गल)\, ताल}{\sqrt{(१-ल)}}$$ अब प्रश्नानुसार स, ग से स्वतन्त्र है इस लिये

$$० = \frac{तास}{ताग} = \int_0^{१} \frac{\frac{फ(गल)}{२\sqrt{ग}} + ल\sqrt{ग}\, फ'(गल)}{\sqrt{(१-ल)}} = \int_0^{ग} \frac{फ(य) + २यफ'(य)}{२ग\sqrt{(ग-य)}} ताय$$

यह सब ग के मान में जब $\frac{तास}{ताग} = ०$ है इस लिये अवश्य ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा सिद्ध कर सकते हो कि

$$फ(य) + २य\, फ'(य) = ० \therefore \frac{फ'(य)}{फ(य)} = -\frac{१}{२य}$$

इस लिये $ला\, फ(य) = -\frac{१}{२} ला(य) + स्थि$।

इस लिये $फ(य) = \frac{आ}{\sqrt{य}}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।

इस वक्र में नीच स्थान से यदि उस विन्दु तक जिसका भु = य है चाप चा हो तो गति विद्या से

$$\frac{ताचा}{ताय} = फ(य) = \frac{आ}{\sqrt{य}} \therefore चा = २आ\sqrt{य}$$

(७१ वां प्रक्रम देखो) इस पर से कह सकते हो कि ऊपर का वक्र चक्रादल होगा।

(४) $\int_{०}^{\infty} इ^{-अय} ताय = \frac{१}{अ}$ तो यहां न वार अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से $\int_{०}^{\infty} य^{न} इ^{-अय} ताय = \frac{\lfloor न}{अ^{न-१}}$ यह सिद्ध हुआ।

क्योंकि $\int इ^{-अय} ताय = \frac{इ^{-अय}}{अ} = -\frac{१}{अइ^{अय}}$

इस लिये $\int_{०}^{\infty} इ^{-अय} ताय = -\frac{१}{अइ^{\infty}} + \frac{१}{अइ^{०}} = ० + \frac{१}{अ} = \frac{१}{अ}$

इस तरह से सैकड़ों प्रश्नोत्तर निकाल सकते हो।

१९८। फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullani)

इसे सिद्ध करना है कि $\int_{०}^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = फ(०) \times ला\left(\frac{क}{अ}\right)$

कल्पना करो कि स = $\int_{०}^{च} \frac{फ(ल) - फ(०)}{ल} ताल$ इस में ल = अय तो

$$स = \int_{0}^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(०)}{य} ताय \ldots\ldots (१)$$

इस में यदि अ के स्थान में क को रख दें तो

$$स = \int_{0}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय) - फ(०)}{य} ताय \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) के अन्तर पर से

$$\int_{0}^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय)ताय}{य} - \int_{0}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०)ला \int_{\frac{च}{क}}^{\frac{च}{अ}} \frac{ताय}{य}$$

$$= \int_{0}^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय - \int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०)ला \left(\frac{अ}{क}\right) \cdots\cdots (३)$$

यहां यदि च $= \infty$ तो यदि $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = ०$

तो $\int_{0}^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = फ(०) \times ला\left(\frac{क}{अ}\right)$

जैसे यदि फ (य) = कोज्याय तो

यहां $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{कोज्याकय}{य} ताय = ०$ यदि च $= \infty$

क्योंकि $\int य^{-१} कोज्याकयताय = \frac{य^{-१} ज्याकय}{क} + \frac{१}{क} \int य^{-२} ज्याकयताय$

(खण्डचलानयन से)

इस लिये य का अनन्त मान मानने से कोज्याकय, और ज्याकय तो सर्वदा १ से कम रहेंगे परन्तु भाजक ∞ के तुल्य होगा।)

इस लिये $\int_{0}^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = \int_{0}^{\infty} \frac{कोज्याअय - कोज्याकय}{य} ताय$

$$= फ(०) ला\left(\frac{क}{अ}\right) = कोज्या(०) \times ला\left(\frac{क}{अ}\right) = ला\left(\frac{क}{अ}\right)$$

जहाँ कहीं फ (०) = ० तहाँ फ्रुलानी (Frullani) के सिद्धान्त से ठीक मान न आवेगा जैसे $\int_0^\infty \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}}$ ताय यहाँ फ(०) = ० इस लिये

(३) समीकरण से

$$\int_0^\infty \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}}\text{ताय} = \int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}^{\frac{\text{च}}{\text{क}}} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}}\text{ताय, जहाँ च} = \infty$$

दहने पक्ष में स्पष्ट है कि $\frac{\text{च}}{\text{अ}}, \frac{\text{च}}{\text{क}}$ भीतर सब अनन्त मान में

$\text{स्प}^{-1}\text{कय} = \text{स्प}^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ इस लिये

$$\int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}^{\frac{\text{च}}{\text{क}}} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{कयताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}^{\frac{\text{च}}{\text{क}}} \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{2}\,\text{ला}\left(\frac{\text{अ}}{\text{क}}\right)$$

इस लिये $\int_0^\infty \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}}\text{ताय} = \frac{\pi}{2}\,\text{ला}\left(\frac{\text{अ}}{\text{क}}\right)$

१९९। यूलर के चल (Eulerian Integrals)

$\int_0^1 \text{य}^{\text{द}-1}(1-\text{य})^{\text{म}-1}$ ताय इस सान्तचल को यूलर का पहला चल कहते हैं।

और इसे हम बी (द,म) इस संकेत से प्रकाश करते हैं। यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का दूसरा अक्षर बीटा (B) को लेकर इस को बीटा फल (Beta function) कहते हैं। हमने अपने देश के अनुसार इस का नाम बीजफल रखा है।

$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{य}}\text{य}^{\text{न}-1}$ ताय इस को यूलर का दूसरा चल कहते हैं और इसे हम गा(न) इस संकेत से प्रकाश करते हैं। यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का तीसरा अक्षर गामा (G) को लेकर इसे गामा फल (Gmma function) कहते हैं हमने इसका नाम गाढ़फल रखा है।

इन दोनों को यूलर ने निकाला है इसी लिये आदर के लिये उसके नाम सहित इन्हें बोलते हैं।

यूलर का जन्म सन् १७०७ ई० में हुआ था और ७६ वर्ष की अवस्था में इसकी मृत्यु हुई थी बीच में यह अंधा भी हो गया था और घर में आग लग जाने से वहुत से इसके प्रकार भस्म भी हो गये तथापि वहुत से इस के ग्रन्थ अद्यावधि यूरप में प्रसिद्ध हैं जिनका वर्णन मैं इस चलराशिकलन में व्यर्थ समझता हूँ इस लिये अपने कृत्य के ऊपर लौट कर कुछ इन दोनों चलों के सिद्धान्तों को दिखलाता हूँ। नीचे सर्वत्र द, म और न को धन समझो।

२००। ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{१} य^{द-१}(१-य)^{म-१} ताय = \int_0^{१} य^{म-१}(१-य)^{द-१}$$

इस लिये बी (द,म) = बी (म,द)

अर्थात् द,म का परस्पर परिवर्त्तन कर देने से मान में कुछ भी अन्तर नहीं होता।

यदि बी (द,म) में $य = \frac{र}{१+र}$ तो

$$\int_0^{१} य^{द-१}(१-य)^{म-१} ताय = बी\ (द,म) = \int_0^{\infty} \frac{र^{द-१} तार}{(१+र)^{द+म}}$$

उसी में यदि $य = \frac{१}{१+र}$ तो

$$\int_0^{१} य^{द-१}(१-य)^{म-१} ताय = बी\ (द,म) = \int_0^{\infty} \frac{र^{म-१} तार}{(१+र)^{द+म}}\ ।$$

२०१। यूलर के दूसरे चल में यदि $इ^{-य} = र$ अर्थात् $य = ला\frac{१}{र}$

तो $\int_0^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय = गा(न) = \int_0^{१} \left(ला\frac{१}{र}\right)^{न-१} तार$ यह एक गा(न) का रूपान्तर है।

खण्ड चलानयन से

$$\int इ^{-य} य^{न} ताय = -इ^{-य} य^{न} + न\int इ^{-य} य^{न-१} ताय$$

और $इ^{-य} य^{न}$ शून्य के तुल्य होता है यदि य = ०, य = ∞ हो (चलनकलन का ३६ वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये $\int_0^{\infty} इ^{-य} य^{न} ताय = न\int_0^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय$

अर्थात् $\text{गा}(\text{न}+१)=\text{नगा}(\text{न})$ . . . . (१)

और $\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}} \text{ताय} = १$ (१९७ प्रक्रम के (४) उदाहरण से जहाँ अ = १)

इस लिये $\text{गा}(१)=१,$ . . . . (२)

यदि न अभिन्न हो तो (१) और (२) से

$$\text{गा}(\text{न}+१) = \lfloor\text{न}$$

परन्तु यदि न भिन्न और १ से अधिक हो तो यदि गा(म) इसका मान (जहाँ म < १) ज्ञात हो तो (१) समीकरण से बार बार क्रिया करने से गा(न) का मान भी आ जायगा।

२०२। यदि जय = ल तो

$$\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{जय}} \text{य}^{\text{न}-१} \text{ताय} = \frac{१}{\text{ज}^{\text{न}}} \int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{ल}} \text{ल}^{\text{न}-१} \text{ताल} = \frac{\text{गा}(\text{न})}{\text{ज}^{\text{न}}}।$$

२०३। $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \text{य}^{\text{द}+\text{म}-१} \text{र}^{\text{म}-१} \text{इ}^{-(१+\text{र})\text{य}}$ ताय तार इस का द्विगुण चलानयन से मान ले आवें तो २०२ प्रक्रम से

$$\text{गा}(\text{द}+\text{म})\int_{0}^{\infty} \frac{\text{र}^{\text{म}-१}\text{तार}}{(१+\text{र})^{\text{द}+\text{म}}} = \text{गा}(\text{द}+\text{म})\ \text{बी}(\text{द},\text{म})$$ (२०० वें प्रक्रम)

और ऊपर के द्विगुण चल में यदि पहले य के वश से चलानयन करें तो

$$\text{गा}(\text{म}) \int_{0}^{\infty} \frac{\text{इ}^{-\text{य}}\text{य}^{\text{द}+\text{म}-१}}{\text{य}^{\text{म}}} \text{ताय} = \text{गा}(\text{म}) \int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{\text{द}-१} \text{ताय}$$

$= \text{गा}(\text{म})\ \text{गा}(\text{द})$ इस लिये ६३ वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से

$$\text{गा}(\text{द}+\text{म})\ \text{बी}(\text{द},\text{म}) = \text{गा}(\text{म})\ \text{गा}(\text{द})$$

$$\therefore \text{बी}(\text{द},\text{म}) = \frac{\text{गा}(\text{म})\text{गा}(\text{द})}{\text{गा}(\text{द}+\text{म})}$$

इसमें यदि द + म = १ तो गा(द + म) = गा (१) = १ (२०१ प्रक्रम के (२) स॰ से)

इस लिये $\text{बी}(\text{द},\text{म}) = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{र}^{\text{म}-१}\text{तार}}{१+\text{र}} = \text{गा}(\text{म})\ \text{गा}(१-\text{म})$

अब यदि म< १ तो १९१ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{र}^{\text{म}-१}\text{तार}}{१+\text{र}} = \frac{\pi}{\text{ज्याम}\pi}$$ इस लिये।

$$गा(म)\ गा(१—म) = \frac{\pi}{ज्या म \pi}$$

इस में यदि म = $\frac{१}{२}$ तो $\left\{ गा\left(\frac{१}{२}\right) \right\}^{२} = \pi \therefore गा\left(\frac{१}{२}\right) = \sqrt{\pi}$
इसे नीचे की युक्ति से भी सिद्ध कर सकते हो।

२०४। चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{य^{च} — १}{च} =$ लाय यदि च = ०

इस लिये कल्पना करो कि $\left(ला\ \frac{१}{य}\right)^{न-१} = \left[\frac{१—य^{च}}{च}\right]^{न-१} + र$

जहाँ जब च = ० तो र = ०। च के स्थान में $\frac{१}{इ_१}$ रखो तो २०१ प्रक्रम से

$$गा(न) = इ_१^{न-१} \int_0^१ \left(१—य^{\frac{१}{इ_१}}\right)^{न-१} ताय + \int_0^१ र\ ताय$$

$$समशोधन\ से\ गा(न) = \int_0^१ र\ तार = इ_१^{न-१} \int_0^१ \left(१—य^{\frac{१}{इ_१}}\right)^{न-१} ताय$$

$$= इ_१^{न} \int_0^१ ल^{इ_१-१} (१—ल)^{न-१} ताल, य = ल^{इ_१}\ मानने\ से$$

अब यहां हमें सामर्थ्य है कि $इ_१$ को धनात्मक और चाहे जितना बड़ा कल्पना कर सकें इस लिये यदि $इ_१ = \infty$ तो र = ० इस लिये ५१ प्रक्रम के (१) समीकरण से और $इ_१$, और न को बदल देने से

$$गा(न) = \frac{|\underline{इ_१}}{न(न+१)\cdots(न+इ_१-१)} इ_१^{न-१} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

(१) में न के स्थान में न-म, न+म का उत्थापन देने से

$$गा(न—म) = \frac{|\underline{इ_१}}{(न-म)(न-म+१)(न-म+इ_१-१)} इ_१^{न-म-१} \ldots\ldots (२)$$

$$गा(न+म) = \frac{|\underline{इ_१}}{(न+म)(न+म+१)\cdots(न+म+इ_१-१)} इ_१^{न+म-१} \cdots (३)$$

इस लिये।

$$\frac{\{गा(न)\}^{२}}{\{गा(न-म)\}\ \{गा(न+म)\}} = \frac{\dfrac{\{|\underline{इ_१}\}^{२} इ_१^{२न-२}}{न^{२}(न+१)^{२}\cdots(न+इ_१-१)^{२}}}{\dfrac{\{|\underline{इ_१}\}^{२} इ_१^{२न-२}}{(न^{२}-म^{२})\{(न+१)^{२}-म^{२}\}\cdots\{(न+इ_१-१)^{२}-म^{२}\}}}$$

$$= \frac{(न^2-म^2)\{(न+१)^2-म^2\}\cdots\{(न+इ_१-१)^2-म^2\}}{न^2(न+१)^2\cdots\cdots\cdots(न+इ_१-१)^2}$$

$$= \left\{१-\frac{म^2}{न^2}\right\}\left\{१-\frac{म^2}{(न+१)^2}\right\}\left\{१-\frac{म^2}{(न+२)^2}\right\}\cdots\cdots\quad(४)$$

२०५। ऊपर के प्रक्रम के (४) समीकरण में यदि न = १ तो

$$\frac{१}{गा(१-म)गा(१+म)} = \left(१-\frac{म^2}{१^2}\right)\left(१-\frac{म^2}{२^2}\right)\left(१-\frac{म^2}{३^2}\right)\cdots\cdots$$

$= \frac{ज्याम\pi}{म\pi}$ (चलनकलन के २०वें प्रकम के (८)वें उदाहरण से)

इस लिये $गा(१-म)\ गा(१+म) = \frac{म\pi}{ज्याम\pi}$

परन्तु २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से $गा\ (१+म) = म\ गा(म)$

इस लिये $गा(१-म)\ गा(म) = \frac{\pi}{ज्याम\pi}$ यह सिद्ध हुआ।

२०६। यदि $या = गा\left(\frac{१}{न}\right)गा\left(\frac{२}{न}\right)गा\left(\frac{३}{न}\right)\cdots गा\left(\frac{न-१}{न}\right)$ जहां न धन अभिन्न है

तो $या = गा\left(१-\frac{१}{न}\right)गा\left(१-\frac{२}{न}\right)\cdots गा\left(\frac{१}{न}\right)$ उलट के लिखने से इस

लिये $या^2 = गा\left(\frac{१}{न}\right)गा\left(१-\frac{१}{न}\right)गा\left(\frac{२}{न}\right)गा\left(१-\frac{२}{न}\right)\cdots गा\left(\frac{१}{न}\right)गा\left(१-\frac{१}{न}\right)$

$$= \frac{\pi^{न-१}}{ज्या\frac{\pi}{न}ज्या\frac{२\pi}{न}\cdots ज्या\frac{(न-१)\pi}{न}} \text{ (ऊपर के प्रक्रम से)}$$

परन्तु चलनकलन के ३१६ प्रक्रम के (१) समीकरण से यदि न के स्थान में २न का उत्थापन दो तो

$$\frac{य^{२न}-१}{य^2-१} = \left(१-२\ यकोज्या\frac{\pi}{न}+य^2\right)\left(१-२यकोज्या\frac{२\pi}{न}+य^2\right)\cdots\cdots$$

$\left(१-२\ यकोज्या\frac{(न-१)}{न}\pi+य^2\right)$ इस में क्रम से य = १, य = −१ मान बायें पक्ष में उस का ठीक मान न रख देने से

$$न = \left(२ज्या\frac{\pi}{२न}\right)^2\left(२ज्या\frac{२\pi}{२न}\right)^2\cdots\left(२ज्या\frac{(न-१)\pi}{२न}\right)^2$$

$$न = \left(२कोज्या\frac{\pi}{२न}\right)^2\left(२कोज्या\frac{२\pi}{२न}\right)^2\cdots\left(२कोज्या\frac{(न-१)\pi}{२}\right)^2$$

दोनों का घात कर मूल लेने से

$$न = २^{न-१} ज्या\frac{\pi}{न} ज्या\frac{२\pi}{न} \cdots ज्या\frac{(न-१)\pi}{न}$$

इस लिये $या^२ = \frac{(२\pi)^{न-१}}{न}$ और $या = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{-\frac{१}{२}}$

२०७ । यदि $फ(य) = \frac{न^{नय} गा(य) गा(य+\frac{१}{न}) गा(य+\frac{२}{न}) \cdots गा(य+\frac{न-१}{न})}{न गा(नय)} \cdots (१)$

तो य के स्थान में य + १ का उत्थापन देने से

$$फ(य+१) = \frac{न^{नय+न} गा(य+१) गा(य+१+\frac{१}{न}) गा(य+१+\frac{२}{न}) \cdots गा(य+१+\frac{न-१}{न})}{न\, गा\,(नय+न)}$$

$$= \frac{न^{न} न^{नय} य गा(य)\,(य+\frac{१}{न}) गा(य+\frac{१}{न})(य+\frac{२}{न}) गा(य+\frac{२}{न}) \cdots (य+\frac{न-१}{न}) गा(य+\frac{न-१}{न})}{न\, गा\,(नय+न)}$$

$$= \frac{न^{न} य\,(य+\frac{१}{न})(य+\frac{२}{न}) \cdots (य+\frac{न-१}{न}) फ(य)}{(नय+न-१)\,(नय+न-२) \cdots नय} = फ(य+१)$$

$$= \frac{नय(नय+१)(नय+२) \cdots (नय+न-१)}{(नय+न-१)(नय+न-२) \cdots नय} फ(य) = फ(य)$$

इसी तरह फ(य + २) = फ(य + १) = फ(य) = फ(य + म) जहाँ म चाहे जैसा बड़ा मान सकते हैं। इस लिये फ (य) = फ ($इ_१$) जहाँ $इ_१ = \infty$ । इस लिये फ(य), य से स्वतन्त्र है अर्थात् फ(य) का मान सर्वदा एक ही होगा चाहे य का कोई मान हो। इस लिये जब $य = \frac{१}{न}$ तो (१) में उत्थान देने से।

$$फ(\;य\;) = गा(\frac{१}{न}) गा(\frac{२}{न}) गा(\frac{३}{न}) गा(\frac{न-१}{न}) = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{-\frac{१}{२}} \text{ (२०६ प्रक्रम से)}$$

और जब

$$\frac{न^{नय} गा\,(य)\, गा\,(य+\frac{१}{न})\, गा\,(य+\frac{२}{न}) \cdots गा(+\frac{न-१}{न})}{न\, गा(नय)} = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{-\frac{१}{२}}$$

इस लिये।

$$गा(य)\, गा(य+\frac{१}{न})\, गा(य+\frac{२}{न}) \cdots गा(य+\frac{न-१}{न}) = गा(नय)\,(२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{\frac{१}{२}-नय} \quad \cdots\cdots (२)$$

यह एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ। इसमें यदि $य = \frac{१}{न}$ तो २०६ प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा।

इस (२) समीकरण के सिद्धान्त को गौस (Gauss) ने वर्णन किया है।

२०८। ऊपर के प्रक्रम में (२) का लघुरिक्‌थ लेकर य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{न गा'(नय)}{गा(नय)} = \frac{गा'(य)}{गा(य)} + \frac{गा'(य + \frac{१}{न})}{गा(य + \frac{१}{न})} + \cdots + \frac{गा'(य + \frac{न-१}{न})}{गा(य + \frac{न-१}{न})} + नलान \cdots (१)$$

जहाँ गा'(नय) इत्यादि $\frac{ता}{ताय}$ { गा(नय) } इत्यादि के बोधक हैं।

(१) का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और नय के स्थान में ल को रखने से।

$$\frac{ता^२ लागा(ल)}{ताल^२}$$

$$= \frac{१}{न^२}\left\{ \frac{ता^२ लागा(य)}{ताय^२} + \frac{ता^२ लागा(य + \frac{१}{न})}{ताय^२} + \cdots + \frac{ता^२ लागा(य + \frac{न-१}{न})}{ताय^२} \right\}$$

यदि न का मान अनन्त कल्पना करें तो दहने पक्ष का मान ४० प्रक्रम के अनुसार

$$\frac{१}{न}\int_{य}^{य+१} \frac{ता^२ लागा(य)}{ताय^२} ताय = \frac{१}{न}\left\{ \frac{तालागा(य+१)}{ताय} - \frac{तालागा(य)}{ताय} \right\}$$

$$= \frac{१}{न}\left\{ \frac{तालाय + ताला\ गा(य)}{ताय} - \frac{ताला\ गा(य)}{ताल} \right\} = \frac{१}{न}\left\{ \frac{१}{य} \right\} = \frac{१}{नय} = ०$$

इस लिये यदि नय अर्थात् ल अनन्त हो तो $\frac{ता^२ ला\ गा(ल)}{ता^२ ल}$ यह शून्य के तुल्य होगा।

अब २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से।

$$गा(य) = \frac{गा(य+१)}{य} = \frac{गा(य+२)}{य(य+१)} = \frac{गा(य+३)}{य(य+१)(य+२)} = \frac{गा(य+न)}{य(य+१)\cdots(य+न-१)},$$ जहाँ

न = ∞ इस के लघुरिक्‌थ का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{तालागा(य)}{ताय} = \frac{तालागा(य+न)}{ताय} - \left(\frac{१}{य} + \frac{१}{(य+१)} + \cdots + \frac{१}{(य+न-१)}\right)$$

इस का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और ऊपर की युक्ति से $\frac{ता^२ लागा(य+न)}{ताय^२} = ०$ करने से।

$$\frac{ता^२ लागा(य)}{ताय^२} = \frac{१}{य^२} + \frac{१}{(य+१)^२} + \frac{१}{(य+२)^२} + \cdots अनन्त \cdots (२)$$

इस का य के १ और य के मान में सान्तचलानयन करने से।

$$\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}} + \text{स्थि} = \left(१ - \frac{१}{\text{य}}\right) + \left(\frac{१}{२} - \frac{१}{\text{य}+१}\right) + \left(\frac{१}{३} - \frac{१}{\text{य}+२}\right) + \cdots (३)$$

इस में यदि य = १ तो दहना पक्ष शून्य हो जायगा इस लिये।

$$\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}} = -\text{स्थि} = \frac{\text{गा}'(१)}{\text{गा}(१)} = \text{गा}'(१)$$

अर्थात् स्थि = −गा'(१)। इसको यूलर का स्थिराङ्क कहते हैं। और (३) में जो श्रेढी उत्पन्न हुई है वह य के प्रत्येक धन मान में सान्त होगी अर्थात् उसका प्रत्येक धन य के मान में मान एक निश्चत संख्या के भीतर ही रहेगा।

$\text{गा}(\text{न}) = \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{\text{न}-१} \text{ताय}$ इस का १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से न के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से $\text{गा}'(\text{न}) = \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{\text{न}-१} \text{लायताय}$

इस लिये $\text{गा}'(१) = \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{य}} \text{लाय ताय}$

(१) समीकरण में मानो कि य = १ तो

$$\frac{\text{गा}'(\text{न})}{\text{गा}(\text{न})} - \text{लान} = \frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{\text{गा}'(१)}{\text{गा}(१)} + \frac{\text{गा}'(१+\frac{१}{\text{न}})}{\text{गा}(१+\frac{१}{\text{न}})} + \cdots + \frac{\text{गा}'(१+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}{\text{गा}(१+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}\right\}$$

इसमें यदि न = ∞ तो ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा दहना पक्ष $\int_1^2 \frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}}$ = लागा(२)−लागा(१) = ० क्योंकि २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से गा(२) = गा(१)

इस लिये यदि न = ∞ तो $\frac{\text{गा}'(\text{न})}{\text{गा}(\text{न})} - \text{लान} = ०$ ऐसा होगा।

(३) में यदि य = ∞ तो ऊपर की युक्ति से $\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}} = \frac{\text{गा}'(\text{य})}{\text{गा}(\text{य})} - \text{लान} = ०$

इस लिये $\text{स्थि} = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \cdots + \frac{१}{\text{न}} - \text{लान}$।

परन्तु $\frac{१}{\text{न}} = \frac{१}{२} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \cdots \frac{\text{न}-१}{\text{न}}$ इसलिये $-\text{लान} = \text{ला}\frac{१}{\text{न}} = \text{ला}\frac{१}{२} + \text{ला}\frac{२}{३} \cdots + \text{ला}\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$

इस लिये $\text{स्थि} = १ + \frac{१}{२} + \text{ला}\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \text{ला}\frac{२}{३} + \cdots$

$$= १ + \frac{१}{२} + \text{ला}\left(१ - \frac{१}{२}\right) + \frac{१}{३} + \text{ला}\left(१ - \frac{१}{३}\right) + \cdots$$

इस लिये साधारण रीति से पहले पद को छोड़ कर दो दो पदों को मिला कर एक पद मानने से न संख्यक पद = $\frac{१}{\text{न}} + \text{ला}\left(१ - \frac{१}{\text{न}}\right)$

$$= \frac{१}{न} - \frac{१}{न} - \frac{१}{२न^२} - \frac{१}{३न^३} - \frac{१}{४न^४} - - - - = - \frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \frac{१}{४न^२} + \cdots\right)$$

इस लिये $स्थि = १ - यौ \left\{ \frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \frac{१}{४न^२} + \cdots\right) \right\}$

$$= १ + यौ \left\{ \frac{१}{न} + ला\left(१ - \frac{१}{न}\right) \right\} \cdots \qquad (४)$$

जहाँ न के स्थान में २,३,४, इत्यादि का उत्थापन देने से $\frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \cdots\right)$

इस के वा $\frac{१}{न} + ला\left(१ - \frac{१}{न}\right)$ इस के जितने मान होंगे उन का योग यौ से अपेक्षित है।

स्थिर का मान जानने के लिये (४) समीकरण में जितना ही अधिक दशमलव अपेक्षित हो उतनीही न की संख्या बढ़ाते जाओ।

स्थिर का मान १० दशमलव तक ·५७७२१५६६४९ यह है। सौ दशमलव से भी अधिक स्थान तक इसका मान परिगणित है।

(See Proceedings of the Royal Society, Vol. XIX. P. 514, and Vol XX. P. 29)

२०९। ऊपर के प्रक्रम के (२) समीकरण में यदि य के स्थान में य + १ का उत्थापन दें

$$\text{तो } \frac{ता^२लागा(य+१)}{ताय^२} = \frac{१}{(य+१)^२} + \frac{१}{(य+२)^२} + \frac{१}{(य+३)^२} + \cdots\cdots ।$$

न−२ बार तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ता^नलागा(य+१)}{ताय^न} = (-१)^न \underline{|न-१} \left\{ \frac{१}{(य+१)^न} + \frac{१}{(य+२)^न} + \frac{१}{(य+३)^न} + \cdots \right\}$$

कल्पना करो कि $सा_न = १ + \frac{१}{_२न} + \frac{१}{_३न} + \cdots + अनन्त$

तो ऊपर के समीकरण में यदि य = ० और न $>$ २ तो

$$\frac{ता^नलागा(य+१)}{ताय^न} = सा_न(-१)^न \underline{|न-१}$$

परन्तु जब य = ० तो $\frac{तालागा(य+१)}{ताय} = \frac{गा'(१)}{गा(१)} = -स्थि$ (२०८ प्रक्रम के (३) समीकरण से) और लागा (१ + य) = लागा (१) = ला (१) = ०, इसलिये म्याक्लौरिन (maclaurin) के सिद्धान्त से

$$\text{लागा}(१+\text{य}) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} - \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_४\text{य}^४}{४} - \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \cdots \quad (१)$$

यदि य का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेढी सान्त होगी ।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनों पर से सिद्ध है कि यदि य के ०, और $\frac{१}{२}$ के भीतर सब मानों में गा(य) इस का मान निदित हो तो, $\frac{१}{२}$, १ इन मानों में वा १, १$\frac{१}{२}$ इन मानों में अर्थात् वार वार क्रिया करने से य के सब धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेढी य के ० से लेकर $\frac{१}{२}$ तक सब मानों में लागा (१ + य) इस का मान बनाती है फिर इन लघुरिक्थ पर से १, से ले १$\frac{१}{२}$ तक सब मानों में गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब य के धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

२१०। $\text{लागा}(१+\text{य}) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} - \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \ldots\ldots$

इस लिये $\text{लागा}(१-\text{य}) = \text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \ldots\ldots$

$\therefore$ लागा(१ + य) + लागा (१—य) = ला { गा (१ + य) गा (१—य) }
= ला { यगा(य)गा(१—य) } = लाय + ला { गा(य)गा(१—य) }

$= \text{ला} \left(\frac{\pi\text{य}}{\text{ज्याय}\pi}\right)$, ……… (२०५ प्रक्रम से)

$= २\left(\frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} + \frac{\text{सा}_४\text{य}^४}{४} + \ldots\right) = \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\} = \text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi}$

इसी तरह $-२\left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \ldots\right) = \text{ला}\left\{\frac{\text{गा}(१+\text{य})}{\text{गा}(१-\text{य})}\right\}$

दोनों को जोड़ देने से $\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - २\left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \ldots\right)$
$= \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\}^२$

इस लिये $\text{ला}(१+\text{य}) = \frac{१}{२}\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \ldots\right)$

$= \frac{१}{२}\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - \text{ला}\frac{१+\text{य}}{१-\text{ल}} + (१-\text{स्थि})\text{य} - \frac{१}{३}(\text{सा}_३-१)\text{य}^३ - \frac{१}{५}(\text{सा}_५-१)\text{य}^५ - \cdots$

य का मान $\frac{१}{२}$ से अल्प हो तो यह श्रेढी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी ।

२११। गा (१ + य) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो

लागा(१ + य) का मान निकला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो। इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्विधि से

गा (१ + य) के न्यूनतम मान में, १ + य = १ ·४६१६३२१४५११०५।

लेजेण्ड्र (Legendre) साहब ने लागा (य + १) के मान के लिये एक सारणी बना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १,२ मानों के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त में लिखेंगे।

२१२। बहुत से सान्तचलों का मान गाढ फल के रूप में आ जाता है जैसे $\int_0^\infty इ^{-अ^2य^2}$ ताय इसमें यदि $अ^2य^2 = र$ तो

$$\int_0^\infty इ^{-अ^2य^2} ताय = \int_0^\infty \frac{इ^{-र} तार}{२अ\sqrt{र}} = \int_0^\infty \frac{इ^{-र} र^{\frac{१}{२}-१} तार}{२अ} = \frac{१}{२अ} गा\left(\tfrac{१}{२}\right)$$

(गाढ़ फल के लक्षण से) $= \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}$ (२०५ वें प्रक्रम से)

और $\int_0^१ \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}}{(य+अ)^{द+म}}$ ताय

इस में यदि $\frac{य}{य+अ} = \frac{र}{१+अ}$ तो $य = रअ \div १ + अ - र$

$$\int_0^१ \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}}{(य+अ)^{द+म}} ताय = \frac{१}{अ^म(१+अ)^द}\int_0^१ र^{द-१}(१-र)^{म-१} तार$$

$$= \frac{१}{अ^म(१+अ)^द} बी\ (द,म) \frac{१}{अ^म(१+अ)^द} \frac{गा(द)\ गा(म)}{गा\ (द+म)}$$ (२०३ प्रक्रम से)

फिर $\int_0^१ य^{द-१}(१-य^२)^{म-१}$ताय इस में मानो कि $य^२ = र$ तो

$$\int_0^१ य^{द-१}(१-य^२)^{म-१}ताय = \tfrac{१}{२}\int_0^१ र^{\frac{द}{२}-१}(१-र)^{म-१}तार = \frac{गा(\frac{द}{२})गा(म)}{२गा(\frac{द}{२}+म)}$$

इस तरह से $\int_0^{\frac{\pi}{२}}$ ज्या^{प}षको ज्या^{ब}ष ताष इसमें यदि ज्याष = य तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^पष\ कोज्या^बष\ ताय = \int_0^१ य^{प+१-१}(१-य^२)^{\frac{ब+१}{२}-१}\ ताय$$

$$= \frac{गा(\frac{प+१}{२})गा(\frac{ब+१}{२})}{२गा(\frac{प+ब}{२}+१)}$$

$$लागा(१+य) = -स्थिय + \frac{सा_२ य^२}{२} - \frac{सा_३ य^३}{३} + \frac{सा_४ य^४}{४} - \frac{सा_५ य^५}{५} + \cdots (१)$$

यदि य का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेढी सान्त होगी।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनों पर से सिद्ध है कि यदि य के ०, और $\frac{१}{२}$ के भीतर सब मानों में गा(य) इस का मान विदित हो तो, $\frac{१}{२}$, १ इन मानों में वा १, $१\frac{१}{२}$ इन मानों में अर्थात् वार वार क्रिया करने से य के सब धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेढी य के ० से लेकर $\frac{१}{२}$ तक सब मानों में लागा (१+य) इस का मान बनाती है फिर इन लघुरिक्थ पर से १, से ले $१\frac{१}{२}$ तक सब मानों में गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब य के धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं।

२१०। $लागा(१+य) = -स्थिय + \frac{सा_२ य^२}{२} - \frac{सा_३ य^३}{३} + \ldots\ldots$

इस लिये $लागा(१-य) = स्थिय + \frac{सा_२ य^२}{२} + \frac{सा_३ य^३}{३} + \ldots\ldots$

$\therefore लागा(१+य) + लागा(१-य) = ला\{गा(१+य)\, गा(१-य)\}$

$= ला\{यगा(य)गा(१-य)\} = लाय + ला\{गा(य)गा(१-य)\}$

$= ला\left(\frac{\pi य}{ज्याय\pi}\right)$, ……… (२०५ प्रक्रम से)

$= २\left(\frac{सा_२ य^२}{२} + \frac{सा_४ य^४}{४} + \ldots\right) = ला\{गा(१+य)गा(१-य)\} = ला\frac{य\pi}{ज्याय\pi}$

इसी तरह $-२\left(स्थिय + \frac{सा_३ य^३}{३} + \ldots\right) = ला\left\{\frac{गा(१+य)}{गा(१-य)}\right\}$

दोनों को जोड़ देने से $ला\frac{य\pi}{ज्याय\pi} - २\left(स्थिय + \frac{सा_३ य^३}{३} + \frac{सा_५ य^५}{५} + \ldots\right)$

$= ला\{गा(१+य)\}^२$

इस लिये $ला(१+य) = \frac{१}{२}ला\frac{य\pi}{ज्याय\pi} - \left(स्थिय + \frac{सा_३ य^३}{३} + \frac{सा_५ य^५}{५} + \ldots\right)$

$= \frac{१}{२}ला\frac{य\pi}{ज्याय\pi} - ला\frac{१+य}{१-ल} + (१-स्थि)य - \frac{१}{३}(सा_३-१)य^३ - \frac{१}{५}(सा_५-१)य^५ - \cdots$

य का मान $\frac{१}{२}$ से अल्प हो तो यह श्रेढी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी।

२११। गा(१+य) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो

लागा(१ + य) का मान निकला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो। इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्विधि से

गा (१ + य) के न्यूनतम मान में, १ + य = १ ·४६१६३२१४५११०५।

लेजेण्ड्र (Legendre) साहव ने लागा (य + १) के मान के लिये एक सारणी वना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १,२ मानों के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त में लिखेंगे।

२१२। वहुत से सान्तचलों का मान गाढ फल के रूप में आ जाता है जैसे $\int_0^\infty इ^{-अ^2य^2}$ ताय इसमें यदि $अ^2य^2 = र$ तो

$$\int_0^\infty इ^{-अ^2य^2} ताय = \int_0^\infty \frac{इ^{-र} तार}{२अ\sqrt{र}} = \int_0^\infty \frac{इ^{-र} र^{\frac{१}{२}-१} तार}{२अ} = \frac{१}{२अ} गा\left(\tfrac{१}{२}\right)$$

(गाढ़ फल के लक्षण से) $= \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}$ (२०५ वें प्रक्रम से)

और $\int_0^१ \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}}{(य+अ)^{द+म}}$ ताय

इस में यदि $\frac{य}{य+अ} = \frac{र}{१+अ}$ तो $य = रअ \div १ + अ - र$

$$\int_0^१ \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}}{(य+अ)^{द+म}} ताय = \frac{१}{अ^म(१+अ)^द}\int_0^१ र^{द-१}(१-र)^{म-१} तार$$

$$= \frac{१}{अ^म(१+अ)^द} बी\ (द,म)\ \frac{१}{अ^म(१+अ)^द}\ \frac{गा(द)\ गा(म)}{गा\ (द+म)}$$ (२०३ प्रक्रम से)

फिर $\int_0^१ य^{द-१}(१-य^२)^{म-१}$ताय इस में मानो कि $य^२ = र$ तो

$$\int_0^१ य^{द-१}(१-य^२)^{म-१}ताय = \tfrac{१}{२}\int_0^१ र^{\frac{द}{२}-१}(१-र)^{म-१}तार = \frac{गा(\frac{द}{२})गा(म)}{२गा(\frac{द}{२}+म)}$$

इस तरह से $\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^पष\, कोज्या^वष$ ताष इसमें यदि ज्याष = य तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^पष\ कोज्या^वष\ ताय = \int_0^१ य^{प+१-१}(१-य^२)^{\frac{व+१}{२}-१} ताय$$

$$= \frac{गा(\frac{प+१}{२})गा(\frac{ब}{}}{२गा(\frac{प+ब}{२}+}$$

फिर $\int_{0}^{१} \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}ताय}{\{अय+क(१-य)\}^{द+म}}$ इस में मानो कि $य = \frac{कर}{अ(१-र)+कर}$ तो

इसका रूप $= \frac{१}{अ^{द}क^{म}} \int_{0}^{१} र^{द-१}(१-र)^{म-१}तार = \frac{गा(द)गा(म)}{अ^{द}क^{म}गा(द+म)}$

फिर $\int_{0}^{अ} य^{द-१}(अ-य)^{म-१}ताय$ इस में मान लो कि $य = अर$ तो इस का

$$रूप = अ^{द+म-१} \int_{0}^{१} र^{द-१}(१-र)^{म-१}तार = अ^{द+म-१} \frac{गा(द)गा(म)}{गा(द+म)} \ldots\ldots\ldots(१)$$

२१३। $\iiint \cdots य^{द-१}र^{म-१}ल^{न-१} \ldots\ldots\ldots तालतारताय \ldots\ldots\ldots$ इस अनेक गुण चल का मान गाढ़ फल के रूप में ले आवो। जहाँ जानते हैं कि $य+र+ल+\cdots < १$ और सब चल संख्याओं का मान ऐसा माना गया है जिसमें अनेक गुण चल का मान धन हो।

यहाँ पहले ल के वश से चलानयन करने से और ०, १ − य − र सीमा मानने से $\int ल^{न-१}ताल = \frac{(१-य-र)^{न}}{न} = \frac{गा(न)}{गा(न+१)}(१-य-र)^{न}$ फिर र के वश से चलानयन करने से र के ०, १−य के मान के भीतर

$\int र^{म-१}(१-य-र)^{न}तार = \frac{(१-य)^{म+न}(गाम)गा(न+१)}{गा(म+न+१)}$, २१२ प्रक्रम के (१) समीकरण से

अन्त में य के वश चलानयन से और ०, १ सीमा मानने से।

$\int य^{द-१}(१-य)^{म+न}ताय = \frac{गा(द)गा(म+न+१)}{गा(द+म+न+१)}$ इस लिये अभीष्ट अनेक गुण

चल का मान $\frac{गा(न)}{गा(न+१)} \frac{गा(म)गा(न+१)}{गा(म+न+१)} \frac{गा(द)गा(म+न+१)}{गा(द+म+न+१)}$

२१४। $\iiint \cdots अ_{१}^{द-१}क_{१}^{म-१}ख_{१}^{न-१} \cdots\cdots ताख_{१}ताक_{१}ताअ_{१}$ इसका मान गाढ़ फल के रूप में जानना है

जहाँ $\left[\frac{अ_{१}}{अ}\right]^{प} + \left[\frac{क_{१}}{क}\right]^{ब} + \left[\frac{ख_{१}}{ख}\right]^{भ} + \cdots\cdots < १$ और चल संख्याओं का मान ऐसा है जिस में सब धन मान हैं।

मान लो कि $य = \left[\frac{अ_{१}}{अ}\right]^{प}$, $र = \left[\frac{क_{१}}{क}\right]^{ब}$, $ल = \left[\frac{ख_{१}}{ख}\right]^{भ}$, ...

तो ऊपर के प्रक्रम से चल का रूप

$$= \frac{अ^{द}क^{म}ख^{न} \cdots\cdots}{प\ ब\ भ \cdots\cdots} \quad \frac{गा(\frac{द}{प})गा(\frac{म}{ब})गा(\frac{न}{भ})}{गा(\frac{द}{प}+\frac{म}{ब}+\frac{न}{भ}+\cdots+१)}$$

यह सिद्धान्त लेज्यून डिरिचलेट् (Lejeune Dirichlet.) का निकाला है।

इस में यदि $प = ब = \cdots\cdots = १$ और $च = अ = क = ख$ तो

$$अ_१ + क_१ + ख_१ + \cdots < च$$

$$\iiint \cdots अ_१^{द-१} क_१^{म-१} ख^{न-१} \cdot ताख_१ ताक_१ ताअ_१ \cdots$$

$$= \frac{च^{द+म+न} गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\cdots\cdots+१)} = ना\ च^{द+म+न+\cdots}$$

जहाँ $ना = \frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\cdots+१)}$

इसी प्रकार यदि चलानयन ऐसा किया जाय जिस में $अ_१ + क_१ + ख_१ + \cdots$

$$< च + \triangle च$$

तो ऊपर की युक्ति से उस का मान $ना(च+\triangle च)^{द+म+न}$ ऐसा होगा।

इस लिये दोनों का अन्तर $ना \{ (च+\triangle च)^{द+म+न+\cdots} - च^{द+म+न+\cdots} \}$

$= ना(द+म+न+\cdots)च^{द+म+न+\cdots-१}\triangle च$ यदि $\triangle च$ अत्यन्त अल्प हो

$$= \frac{गा(द)गा(म)गा(न)\cdots\cdots}{गा(द+म+न+\cdots\cdots)} च^{द+म+न+\cdots-१}\triangle च$$

२१५। $\iiint \cdots य^{द-१} र^{म-१} ल^{न-१} \cdots फ(य+र+ल+\cdots) ताल तार ताय$ इस का मान एक चलानयन के रूप में ले आना है, जहाँ चलानयन ऐसा किया गया है जिस में सब चलों के धन मान लिये गये हैं जहाँ $य+र+ल+\cdots < ग$।

लाघव के लिये मान लो कि तीन चलराशि हैं।

यहाँ ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि $फ(य+र+ल)$ के स्थान में १ मान लें तो उस भाग का चल जो कि योग के $च$, $च+\triangle च$ के भीतर है

$\frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न)} च^{द+म+न\cdots-१}\triangle च$ यह होगा

परन्तु $फ(य+र+ल) = फ(च)$ के स्थान में १ रख कर ऊपर का मान दिखलाया है इस लिये उस को $फ(च)$ से गुण देने से

$\frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न)} फ(च) च^{द+म+न+\cdots-१}\triangle च$ यह एक खण्ड की गति हुई

इस लिये सम्पूर्ण चल $= \frac{\text{गा}(\text{द})\text{गा}(\text{म})\text{गा}(\text{न})}{\text{गा}(\text{द}+\text{म}+\text{न})} \int_{0}^{\text{ग}} \text{फ}(\text{च})\ \text{च}^{\text{द}+\text{म}+\text{न}+\cdots-१}$ ताच यही रीति चाहे जितनी चलराशि हों सर्वत्र दिखलाई जा सकती है ।

२१६। इसी प्रकार त्रिगुण चल

$$\iiint \text{अ}_१^{\text{द}-१}\text{क}_१^{\text{म}-१}\text{ख}_१^{\text{न}-१}\text{फ}\left\{\left(\frac{\text{अ}_१}{\text{अ}}\right)^{\text{प}}+\left(\frac{\text{क}_१}{\text{क}}\right)^{\text{ब}}+\left(\frac{\text{ख}_१}{\text{ख}}\right)^{\text{भ}}\right\}$$

ताख$_१$ ताक$_१$ ताअ$_१$ यह जहाँ चलराशियों के सब धन मान में

$$\left[\frac{\text{अ}_१}{\text{अ}}\right]^{\text{प}}+\left[\frac{\text{क}_१}{\text{क}}\right]^{\text{ब}}+\left[\frac{\text{ख}_१}{\text{ख}}\right]^{\text{भ}}$$ यह ग से अधिक नहीं है

$$\frac{\text{अ}^{\text{द}}\text{क}^{\text{म}}\text{ख}^{\text{म}}}{\text{पबभ}}\ \frac{\text{गा}(\frac{\text{द}}{\text{प}})\text{गा}(\frac{\text{म}}{\text{ब}})\text{गा}(\frac{\text{न}}{\text{भ}})}{\text{गा}(\frac{\text{द}}{\text{प}}+\frac{\text{म}}{\text{ब}}+\frac{\text{न}}{\text{भ}})} \int_{0}^{\text{ग}} \text{फ}(\text{च})\text{च}^{\frac{\text{द}}{\text{प}}+\frac{\text{म}}{\text{ब}}+\frac{\text{न}}{\text{भ}}-१}\ \text{ताच}$$

इसके तुल्य होगा ।

यह रीति चाहे जितनी चलराशि हों सर्वत्र दिखलाई जा सकती है ।

२१७। $\iint \frac{\text{य}^{\text{प}-१}\text{र}^{\text{ब}-१}\text{ताय तार}}{(\text{त}+\text{अय}+\text{कर})^{\text{प}+\text{ब}}}$ इसका रूप साधारण चलानयन के अर्थात् एक चलानयन के स्वरूप में ले आना है जहाँ य, र के सब मान धन हैं और य + र यह ज से अधिक नहीं है। और प, ब, त, अ, और क सब धन स्थिराङ्क हैं। मान लो कि अ $>$ क तो

$$\text{त}+\text{अय}+\text{कर}=\text{त}+\text{अ}\ (\text{य}+\text{र})-(\text{अ}-\text{क})\ \text{र}=\text{श}-\text{ह}$$

जहाँ श = त + अ(य + र), ह = (अ — क) र

इस लिये $(\text{त}+\text{अय}+\text{कर})^{-\text{प}-\text{ब}}$

$$=\text{श}^{-\text{प}-\text{ब}}\left\{१+(\text{प}+\text{ब})\frac{\text{ह}}{\text{श}}+\frac{(\text{प}+\text{ब})\ (\text{प}+\text{ब}+१)}{\underline{|२}}\ \frac{\text{ह}^२}{\text{श}^२}+\cdots\right\}$$

यह श्रेढ़ी सान्त होगी ।

अब ऊपर का द्विगुण चल २१५ वें प्रक्रम से एक चलानयन के रूप में आ सकता है अर्थात् $\iint \frac{\text{य}^{\text{प}-१}\text{र}^{\text{ब}-१}\text{तायतार}}{(\text{त}+\text{अय}+\text{कर})^{\text{प}+\text{ब}}}$

$$=\iint\left[\frac{\text{य}^{\text{प}-१}\text{र}^{\text{ब}-१}}{\text{श}^{\text{प}+\text{ब}}}+\frac{(\text{प}+\text{ब})(\text{अ}-\text{क})\text{य}^{\text{प}-१}\text{र}^{\text{ब}}}{\text{श}^{\text{प}+\text{ब}+१}}\right.$$

$$\left.+\frac{(\text{प}+\text{ब})\ (\text{प}+\text{ब}+१)\ (\text{अ}-\text{क})^२\text{य}^{\text{प}-१}\text{र}^{\text{ब}+१}}{\underline{|२}\ \text{श}^{\text{प}+\text{ब}+२}}+\cdots\right]\text{तायतार}$$

$$= \int_0^{ज} \left\{ \frac{गा(प)गा(ब)}{गा(प+ब)} \frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}} + \frac{गा(प)गा(ब+१)}{गा(प+ब+१)} (प+ब)(अ-क) \frac{ट^{प+ब}}{(त+अट)^{प+ब+१}} \right.$$

$$\left. + \frac{गा(प)गा(ब+२)}{गा(प+ब+२)} \cdot \frac{(प+ब)(प+ब+१)}{\lfloor २} \frac{(अ-क)^२ ट^{प+ब+१}}{(त+अट)^{प+ब+२}} + \cdots \right\} ताट$$

$$= गा(प) \int_0^{ज} \frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}} \left\{ \frac{गा(ब)}{गा(प+ब)} + \frac{(प+ब)\, गा(ब+१)}{गा(प+ब+१)} \frac{(अ-क)ट}{(त+अट)} \right.$$

$$\left. + \frac{(प+ब)(प+ब+१) गा(ब+२)(अ-क)^२ ट^२}{गा(प+ब+२) \quad १.२(त+अट)^२} + \cdots \right\} ताट$$

$$= \frac{गा(प)गा(ब)}{गा(प+ब)} \int_0^{ज} \frac{ट^{प+ब-१}}{\overline{त+अट}^{प+ब}} \left\{ १ + \frac{ब(अ-क)ट}{त+अट} + \frac{ब(ब+१)}{\lfloor २} \frac{(अ-क)^२ ट^२}{(त+अट^२)} + \cdots \right\} ताट$$

$$= \frac{गा(प)गाब}{गा(प+ब)} \int_0^{ज} \frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}} \left\{ १ - \frac{(अ-क)ट}{त+अट} \right\}^{-ब} ताट$$

$$\frac{गा(प)गाब}{गा(प+ब)} \int_0^{ज} \frac{ट^{प+ब-१} ताट}{(त+अट)^{प}(त+कट)^{ब}}$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो।

२१८। $\int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२}$ कोज्या२रयताय इस का मान जानना है जहाँ र और य परस्पर स्वतन्त्र हैं। मान लो कि उद्दिष्ट सान्तचल = स है तो १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{तास}{तार} = -२ \int_0^{\infty} यइ^{-अ^२य^२} ज्या२रयताय$$

परन्तु $\int यइ^{-अ^२य^२}$ ज्या२रयताय

$$= -\frac{इ^{-अ^२य^२} ज्या२रय}{२अ^२} + \frac{२र}{२अ^२} \int इ^{-अ^२य^२} कोज्या२रयताय$$

(खण्ड चलानयन से)

इस लिये $\int_0^{\infty} यइ^{-अ^२य^२}$ ज्या२रयताय $= \frac{२र}{२अ^२} \int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२}$ कोज्या२रय

$$= \frac{२रस}{२अ^२} \text{ इसलिये } \frac{तास}{तार} = -\frac{२रस}{अ^२}$$

स का भाग दे देने से

$$\frac{\frac{\text{तास}}{\text{स}}}{\text{तार}} = \frac{\text{ताला(स)}}{\text{तार}} = -\frac{२र}{अ^{२}} \therefore \text{लास} = -\frac{र^{२}}{अ^{२}} + \text{स्थि}$$

इस लिये $स = आ\, इ^{-\frac{र^{२}}{अ^{२}}}$

जहाँ आ कोई र के वश से स्थिराङ्क है ।

मान लो कि $र = ०$ तो $\int_{०}^{\infty} इ^{-अ^{२}य^{२}} \text{ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}$ (२१२ वें प्रक्रम से)

इस लिये $आ = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}$, और

$$\int_{०}^{\infty} इ^{-अ^{२}य^{२}} \text{कोज्या२रयताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}\, इ^{-\frac{र^{२}}{अ^{२}}}$$

यद्यपि १९४ प्रक्रम में लिख आये हैं कि यदि कोई सीमा अनन्त के तुल्य न हो तब १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु इस स्थान में अनन्त सीमा होने पर भी ठीक होगा क्योंकि दूसरा खण्ड यहाँ पर $\int_{०}^{\infty} इ^{-अ^{२}य^{२}} इ_{१}\text{ताय}$ शून्य ही होगा यदि $इ_{१} = ०$ हो तो क्योंकि ४०वें प्रक्रम की युक्ति से मान लो कि श्रेढी में $इ_{१}$ का सब से बड़ा मान यदि $इ_{२}$ हो तो $\int_{०}^{\infty} इ^{-अ^{२}य^{२}} इ_{१}\, \text{ताय}$ यह $इ_{२} \int_{०}^{\infty} इ^{-अ^{२}य^{२}} \text{ताय}$ इस से अर्थात् $\frac{\sqrt{\pi}}{२अ} इ_{२}$ इस से छोटा होगा । परन्तु कल्पना जैसा किया है उस के धर्म से $इ_{२} = ०$ होगा इस लिये दूसरे खण्ड का नाश हो जाने से १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण यहाँ ठीक ही हुआ ।

२१९ । $\int_{०}^{\infty} इ^{-जय} \frac{\text{ज्यारय}}{य} \text{ताय}$ इस का मान जानना है जहाँ ज स्थिराङ्क और र, य परस्पर स्वतन्त्र हैं । यहाँ मान का मान स मान लो तो १९४ प्रक्रम से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \int_{०}^{\infty} इ^{-जय} \text{कोज्यारयताय}$$

परन्तु $\int इ^{-जय} \text{कोज्यारयताय}$

$$= इ^{-जय} \frac{\text{रज्यारय} - \text{जकोज्यारय}}{ज^{२} + र^{२}} \text{ खण्ड चलानयन से}$$

इस लिये $\int_0^\infty$ इ$^{-\text{जय}}$ कोज्यारयताय $= \frac{\text{ज}}{\text{ज}^2+\text{र}^2}$ ....(१)

इस तरह से $\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{ज}}{\text{ज}^2+\text{र}^2}$

इस लिये　स $=$ स्प$^{-1}\frac{\text{र}}{\text{ज}}$ .... (२)

यहां पर स्थिराङ्क की अपेक्षा नहीं है क्योंकि यदि र $= ०$ तो सभी शून्य हो जायगा। यहां ज के सब धन मान में स का मान ठीक होगा इस लिये यदि ज $= ०$

तो स $=$ स्प$^{-1}\frac{\text{र}}{\text{ज}} = \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\text{ज्याजय}}{\text{य}}$ ताय

यदि ज ऋणात्मक हो तो स का मान—$\frac{\pi}{2}$ होगा।

इस पर से $\int_0^\infty \frac{\text{ज्याकयकोज्याअय}}{\text{य}}$ ताय इसका मान जान सकते हैं क्योंकि सरलत्रिकोणमिति से यह

$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{ज्या (क+अ) य}}{\text{य}}$ ताय $+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{ज्या (क—अ) य}}{\text{य}}$ ताय

इस के तुल्य हुआ और (२) समीकरण में ज $= ०$ मानने से दोनों खण्डों का मान $\frac{\pi}{4}$ इस लिये।

$\int_0^\infty \frac{\text{ज्याकय कोज्या अय}}{\text{य}}$ ताय $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ परन्तु यदि अ $>$ क तो

ऊपर की युक्ति से $\int_0^\infty \frac{\text{ज्या कय कोज्या अय}}{\text{य}}$ ताय $= ०$ यह होगा।

२२०। स $= \int_0^\infty$ इ$^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)}$ ताय इस का मान जानना है।

यहां $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -2\text{अ}\int_0^\infty$ इ$^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)}$ $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^2}$ इस में यदि य $= \frac{\text{अ}}{\text{ल}}$

तो $\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2} = \frac{\text{अ}^2}{\text{ल}^2}+\text{ल}^2$, $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^2} = -\frac{\text{अ ताल}}{\text{ल}^2} \times \frac{\text{ल}^2}{\text{अ}} = -$ ताल

इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -2\text{ अ}\int_0^\infty$ इ$^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)}$ $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^2}$

$$= 2\text{ अ}\int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{ल}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{ल}^2}\right)} \text{ ताल}$$

$$= -२ अ \int_{०}^{\infty} इ^{-\left(ल^{२}+\frac{अ^{२}}{ल^{२}}\right)} ताल = -२ अ स$$

इस लिये $\quad ताल स = -२ ता अ$

$\therefore \quad ला स = -२ अ + स्थि$

इस लिये $\quad स = आ\, इ^{-२अ}$

ऊपर के स मान में यदि अ = ०, $स = \int_{०}^{\infty} इ^{-य^{२}} ताय = \frac{\sqrt{\pi}}{२}$ (२१२वें प्रक्रम से)

इस लिये आ $= \frac{\sqrt{\pi}}{२}$ और $स = \frac{\sqrt{\pi}}{२} इ^{-२अ} = \int_{०}^{\infty} इ^{-\left(य^{२}+\frac{अ^{२}}{य^{२}}\right)} ताय$

२२१ । $\int_{०}^{१} य^{म}(लाय)^{न} ताय = स$, इस का मान जानना है ।

यहां यदि $य = इ^{-ल}$ तो

$$स = \int_{०}^{१} य^{म} (लाय)^{न} ताय = (-१)^{न} \int_{०}^{\infty} इ^{-(म+१)ल} ल^{न} ताल$$

$$= \frac{(-१)^{न}}{(म+१)^{न+}} \int_{०}^{\infty} इ^{-(म+१)ल} \{ल(म+१)\}^{न} (म+१) ताल$$

$$= \frac{(-१)^{न}}{(म+१)^{न+१}} \int_{०}^{\infty} इ^{-ल'} ल'^{न} ताल' \text{ । (यदि } (म+१) ल = ल' \text{)}$$

$$= \frac{(-१)^{न} गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}}$$

यदि लाय के स्थान में $-ला\left(\frac{१}{य}\right) = (-१)\, ला \frac{१}{य}$ रखलें तो

$$\int_{०}^{१} य^{म} (लाय)^{न} ताय = \int_{०}^{१} य^{म} (-१)^{न} \left(ला\frac{१}{य}\right)^{न} ताय$$

$$= (-१)^{न} \int_{०}^{१} य^{म} \left(ला\frac{१}{य}\right)^{न} ताय = \frac{\{(-१)न\}^{२}}{(म+१)^{न+१}} गा (न+१) = \frac{गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}}$$

२२२ । $\int_{०}^{१} \frac{लाय\, ताय}{१-य} = \int_{०}^{१} लाय\, ताय\, (१ + य + य^{२} + \ldots)$

$$= -\left(१ + \frac{१}{२^{२}} + \frac{१}{३^{२}} + \ldots\right) \text{ । (ऊपर के उदाहरण से)}$$

$$= -\frac{\pi^{२}}{६} \text{ । (चलनकलन के २० वें प्रक्रम का (९) उदाहरण दे.)}$$

इस तरह से अनेक उदाहरण कर सकते हो ।

२२३। कल्पना करो कि

$$स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग)\ ताय$$

तो $$स\ ताग = \int_{अ}^{क} फ(य,ग)\ ताय\ ताग$$

इस लिये

$$\int_{अ_1}^{क_1} स\ ताग = \int_{अ_1}^{क_1} \int_{अ}^{क} फ(य,ग)\ ताय\ ताग$$

$$= \int_{अ}^{क}\int_{अ_1}^{क_1} फ(य,ग)\ ताग\ ताय$$ । ६३वें प्रक्रम से

इस पर से भी अनेक सान्तचलों के मान बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं।

२२४। जानते हैं कि $\int_{0}^{\infty} इ^{-जय}\ ताय = \frac{1}{ज}$ । १९० प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि ज = ग, क = ∞, अ = ० तो

$$\int_{अ_1}^{क_1} स\ ताग = \int_{अ_1}^{क_1} \frac{ताज}{ज} = ला\frac{क_1}{अ_1} = \int_{0}^{\infty}\int_{अ_1}^{क_1} फ(य,ग) ताग ताय$$

परन्तु $$\int फ(य,ग)\ ताग = \int फ(य,ज) ताज = \int इ^{-जय} ताज$$

$$= -\frac{इ^{-जय}}{य}$$, इस लिये

$$\int_{अ_1}^{क_1} इ^{-जय} ताज = \frac{इ^{-अ_1 य} - इ^{-क_1 य}}{य}$$ इस लिये

$$\int_{0}^{\infty}\int_{अ_1}^{क_1} फ(य,ज)\ ताज\ ताय = \int_{0}^{\infty} \frac{इ^{-अ_1 य} - इ^{-क_1 य}}{य}\ ताय = ला\frac{क_1}{अ_1}$$

२२५। खण्डचलानयन से जानते हैं कि

$$\int_{0}^{\infty} इ^{-गय}\ कोज्याअ_1 य\ \ ताय = \frac{ग}{ग^2 + अ_1^2}$$

दोनों पक्षों का ग के वश चलानयन करने से और ग की सीमा, अ, क मानने से।

$$\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{-अय} - इ^{-कय}}{य} कोज्याअ_१य\ ताय = \frac{१}{२} ला \frac{क^२ + अ_१^२}{अ^२ + अ_१^२}$$

२२६। यदि $आ = \int_{0}^{\infty} \frac{ज्याअ_१य}{य}\ ताय$ और $का = \int_{0}^{\infty} \frac{कोज्याअ_१य}{१ + य^२} ताय$

आ में यदि $अ_१य = र$

तो $आ = \int_{0}^{\infty} \frac{ज्यार}{र}\ तार$। इस लिये $अ_१$ से आ का कुछ भी सम्बन्ध नहीं है और २१९ वें प्रक्रम की युक्ति से $आ = \frac{\pi}{२}$

$$अब\quad का = \int_{0}^{\infty} \frac{कोज्याअ_१य}{१ + य^२} ताय$$

$$इस\ लिये\ \frac{ताका}{ताअ_१} = \int_{0}^{\infty} - \frac{य\ ज्या\ अ_१य}{१ + य^२}\ ताय$$

$$और \int_{0}^{अ_१} का\ ताअ_१ = \int_{0}^{\infty} \frac{ज्या\ अ_१य}{य(१ + य^२)}\ ताय$$

$$इस\ लिये \int_{0}^{अ_१} का\ ताअ_१ - \int \frac{ताका}{ताअ_१} = \int_{0}^{\infty} \frac{(१ + य^२) ज्याअ_१य}{य(१ + य^२)}\ ताय = आ$$

समशोधन करने से

$$\int_{0}^{अ_१} का\ ताअ_१ - \frac{ताका}{ताग_१} - आ = ० \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

(१) को $इ^{-अ_१} ताअ_१$ से गुणकर $अ_१$ के वश से चलानयन करने से $इ^{-अ_१} \left(\int_{0}^{अ_१} का\ ताअ_१ + का - आ \right) = स्थिराङ्क$

इसलिये $अ_१$ का चाहे जो मान हो (१) का चल कोई नियत संख्या के तुल्य होगा इस लिये यदि $अ_१$ अनन्त के तुल्य हो तो पिछले समीकरण में स्थिराङ्क शून्य के तुल्य होगा क्योंकि उसका बायाँ पक्ष शून्य के तुल्य होता है इस लिये $अ_१$ के अनन्त मान में

$$इ^{-अ_१}\left(\int_0^{अ_१} का\ ताअ_१ + का - आ\right) = ० = \int_0^{अ_१} का\ ताअ_१ + का - आ, \quad \cdots (२)$$

इस लिये (१) और (२) के अन्तर से

$$\frac{ताका}{ताअ_१} = -का$$

इस लिये $का = आ_१\ इ^{-अ_१}$ जहाँ $आ_१$ कोई स्थिराङ्क है

और $\int का\ ताअ_१ = \int आ_१\ इ^{-अ_१} ताअ_१ = -आ_१ इ^{-अ_१}$

इस लिये $\int_0^{अ_१} का\ ताअ_१ = आ_१ - आ_१ इ^{-अ_१}$

(२) में इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{अ_१} काताअ_१ + का - आ = आ_१ - आ_१ इ^{-अ_१} + आ_१ इ^{-अ_१} - आ = आ_१ - आ = ०$$

$$\therefore\ आ_१ = आ \text{ इस लिये } का = आ\ इ^{-अ_१} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (३)$$

यदि $अ_१$ को अत्यल्प मानें अर्थात् $अ_१ = ०$ तो

$$का = \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअ_१य}{१+य^२} ताय = \int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२} = आ$$

इस लिये (३) से $का = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$

यदि $अ_१$ ऋण हो तो (३) से $का = \frac{\pi}{२} इ^{अ_१}$ ऐसा होगा और २१९ वें प्रक्रम की युक्ति से $आ = -\frac{\pi}{२}$

२२७। २२६ प्रक्रम से सिद्ध हुआ है कि

$\int_0^{\infty} \frac{कोज्याअ_१यताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$ इसका $अ_१$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$\int_0^{\infty} \frac{यज्याअ_१य\ ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$ और चलानयन कर मान $अ_१$ के ०, ग के मान के भीतर ले आवें तो

$$\int_0^{\infty} \frac{ज्यागय}{य(१+य^२)} ताय = \frac{\pi}{२}\left(१ - इ^{-अ_१}\right)$$

२२८। खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int इ^{-अय} ज्याअ_१य\ ताय = -इ^{-अय} \cdot \frac{अज्याअ_१य + अ_१कोज्याअ_१य}{अ^२ + अ_१^२}$$

और $$\int इ^{-अय} कोज्याअ_१य\ ताय = इ^{-अय} \frac{अ_१ज्याअ_१य - अकोज्याअ_१य}{अ^२ + अ_१^२}$$

इन पर से $$\int_०^\infty इ^{-अय} ज्या\ अ_१ य\ ताय = \frac{अ_१}{अ^२ + अ_१^२}$$

और $$\int_०^\infty इ^{-अय} कोज्या\ अ_१ य\ ताय = \frac{अ}{अ^२ + अ_१^२}$$ । यदि अ धनात्मक हो।

इन में यदि अ = ० तो

$$\int_०^\infty ज्याअ_१य\ ताय = \frac{अ_१}{अ_१^२} = \frac{१}{अ_१}$$

और $$\int_०^\infty कोज्याअ_१य\ ताय = ०$$

परन्तु $$\int ज्याअ_१य\ ताय = -\frac{कोज्याअ_१य}{अ_१}$$

और $$\int कोज्याअ_१य\ ताय = \frac{ज्याअ_१य}{अ_१}$$

इसलिये

$$\int_०^\infty ज्याअ_१य = -कोज्या\ (\infty) + \frac{१}{अ_१} = \frac{१}{अ_१}$$

$$\therefore\quad कोज्या\ (\infty) = ०$$

और $$\int_०^\infty कोज्याअ_१य\ ताय = ज्या\ (\infty) + ० = ०$$

$$\therefore\quad ज्या\ (\infty) = ०$$

इन पर से यह सिद्ध होता है कि यदि कोण का मान अनन्त हो तो उस की ज्या और कोटिज्या दोनों शून्य के समान होती है यह अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों ने बहुत ही विचार किया है जिसका वर्णन इस चलराशिकलन की पुस्तक में विद्यार्थियों के लिये दुर्बोध कारक है। मेरी समझ में जिस अनन्त कोण के मान में ज्या शून्य होती है उसी अनन्त कोण के मान में कोटिज्या

शून्य के तुल्य नहीं होती है किन्तु दोनों अनन्त कोणों के मानों का अन्तर अवश्य २म$\pi \pm \frac{\pi}{2}$ इस के तुल्य होगा जहाँ म कोई अभिन्न संख्या है।

२२९। फल का विस्तर रूप वना कर भी कहीं कहीं सान्तचल का मान निकल आता है। जैसा कि २२२ प्रक्रम में दिखलाया है उसी चाल के कुछ और उदाहरण दिखलाते हैं।

यदि ला $\left\{ १ - \text{अ} \, \text{इ}^{\text{य}\sqrt{-१}} \right\}$ और ला $\left\{ १ + \text{अ} \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-१}} \right\}$

इन दोनों का विस्तृत मान ले आकर जोड़ डालो तो

$$\text{ला} \, (१ - २ \, \text{अकोज्याय} + \text{अ}^{२})$$

$$= -२ \left(\text{अकोज्याय} + \frac{\text{अ}^{२}}{२} \text{कोज्या२य} + \frac{\text{अ}^{३}}{३} \text{कोज्या३य} + \cdots \right)$$

यहाँ यदि अ < १ तो श्रेढी का मान सान्त होगा

$$\text{इस लिये} \int \text{ला} \, (१ - २ \, \text{अकोज्याय} + \text{अ}^{२}) \, \text{ताय}$$

$$= - २ \left(\text{अज्याय} + \frac{\text{अ}^{२}}{४} \text{ज्या२य} + \frac{\text{अ}^{३}}{९} \text{ज्या३य} + \cdots\cdots \right)$$

$$\text{और} \int_{0}^{\pi} \text{ला} \, (१ - २\text{अकोज्याय} + \text{अ}^{२}) \, \text{ताय} = ० \, ।$$

$$\text{यदि अ} > १ \text{ तो ला } (१ - २\text{अकोज्याय} + \text{अ}^{२})$$

$$= \text{लाअ}^{२} + \text{ला} \, \left(१ - \frac{२}{\text{अ}} \text{कोज्याय} + \frac{१}{\text{अ}^{२}}\right.$$

इस लिये अब ऊपर युक्ति से $\frac{१}{\text{अ}} < १$ इस लिये दूसरे खण्ड का मान शून्य निकलेगा और पहले का π लाअ^{२} = २ π लाअ यह जो कि अभीष्ट मान होगा।

$$\text{यदि अ} = १ \text{ तो } \int \text{ला} \, (१ - २\text{अकोज्याय} + \text{अ}^{२}) \, \text{ताय}$$

$$= \int \text{ला} \, \{ २(१ - \text{अकोज्याय}) \} \, \text{ताय} = \int \text{ला ज्या}^{२} \frac{\text{य}}{२} \, \text{ताय} + \text{ला} \, ४ \int \text{ताय}$$

$$= \int २ \, \text{लाज्या} \, \frac{\text{य}}{२} \, \text{ताय} + २ \, \text{ला} \, २ \int \text{ताय}$$

$$= ४ \int \text{लाज्याय}' \, \text{ताय}' + २\text{ला}२ \int \text{ताय यदि य}' = \frac{\text{य}}{२}$$

$$= ४ \int \text{लाज्याय}' \, \text{ताय}' + २ \, \text{य} \, \text{ला} \, २$$

इसलिये $\int_0^{\pi}$ ला (१-२अकोज्याय + अ^2) ताय = ४ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ लाज्याय ताय + २πला२

२πला $\frac{\pi}{2}$ + २πला२ = ०, ५७ प्रक्रम के (३) उदाहरण से।

तीनों स्वरूप को यदि एक ही समीकरण से दिखलाया चाहो तो पहले को ला(अ^2 − २अगकोज्याय + ग^2) ताय

= लाअ^2 + ला(१ − $\frac{२ग}{अ}$ कोज्याय + $\frac{ग^2}{य^2}$) ताय ऐसे लिखो यदि अ ७ ग

और यदि ग ७ अ तो लाग^2 + ला(१ − $\frac{२अ}{ग}$ कोज्याय + $\frac{अ^2}{ग^2}$) ताय ऐसे लिखो

तब $\int_0^{\pi}$ ला(अ^2 − २अगकोज्याय + ग^2) ताय = २ π लाज

जहाँ दोनों अ और ग में से जो अधिक है उसका द्योतक ज है।

२३०। खण्डचलानयन से $\int$ ला(१−२ अकोज्याय + अ^2) ताय

$$= य \cdot ला(१ - २अकोज्याय + अ^2) - २अ \int \frac{यज्याय \; ताय}{१ - २अकोज्याय + अ^2}$$

इस लिये यदि अ < १ तो

$$\int_0^{\pi} \frac{ज्याय \; ताय}{१ - २ अकोज्याय + अ^2} = \frac{\pi}{२अ} ला(१ + अ)^2 = \frac{\pi}{अ} ला (१ + अ)$$

और यदि अ ७ १ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से

$$इस \; का \; मान = \frac{\pi}{अ} ला(१ + अ) - \frac{\pi}{अ} ला (अ) = \frac{\pi}{अ} ला(१ + \frac{१}{अ})$$

२३१। $\int_0^{\pi}$ कोज्याअ$_1$य ला (१−२अकोज्याय + अ^2) ताय इस का मान

२२९ प्रक्रम के ऐसा यदि श्रेढी में लाकर चलानयन करो (जहां सरल-त्रिकोणमिति से दो कोटिज्याओं के घात को दो कोटिज्या के योग में स्वरूप बना लेना) तो ०, π सीमा के भीतर सब चलों का मान उड़ जायगा एक खण्ड केवल $\int_0^{\pi} \frac{अ^{अ_1}}{अ_1}$ ताय यह रह जायगा यदि

अ∠ १ और यदि अ७१ तो उसी प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{अ^{-अ_१}}{अ_१}$ यह रह जायगा। इसलिये

$$\int_0^\pi कोज्याअ_१य \text{ ला } (१—२अकोज्याय+अ^२) \text{ ताय}$$

$$=-\frac{\pi अ^{अ_१}}{अ_१}, \text{ वा} -\frac{\pi अ^{-अ_१}}{अ_१} \text{ यदि अ} \angle १ \text{ वा अ} ७ १।$$

२३२। खण्डचलानयन से ऊपर के फल का मान ले आवो तो २३० प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{ज्याय\, ज्याअ_१य\, ताय}{१-२अकोज्याय+अ^२} = \frac{\pi}{२}अ^{अ_१-१}$ वा $\frac{\pi}{२}अ^{-(अ_१+१)}$

यदि अ∠१ वा अ७१।

२३३। चलनकलन के ३१४ वें प्रक्रम के अन्त में जो समीकरण उत्पन्न हुआ है उसे २अ से गुण कर १ में जोड़ देने से

$$\frac{१—अ^२}{१—२\,अकोज्याय+अ^२}=१+२अकोज्याय+२अ^२कोज्या२य$$
$$+२अ^३कोज्या३य+\cdots$$

इस में यदि अ∠१ तो इस पर से भी बहुत सान्तचलों का ज्ञान हो सकता है जैसे यदि $अ_१$ अभिन्न हो तो

$$\int_0^\pi \frac{कोज्याअ_१य\, ताय}{१-२अकोज्याय+अ^२}=\frac{\pi अ^{अ_१}}{१-अ^२}$$

क्योंकि श्रेढियों के सीमा के भीतर प्रत्येक पद के सान्तचल नष्ट हो जाँयगे केवल $\frac{२अ^{अ_१}}{१-अ^२}\int कोज्या^२अ_१य\, ताय$ यह रह जायगा जिस का मान सीमा के भीतर $\frac{\pi अ^{अ_१}}{१-अ^२}$ यह होगा।

२३४। $\int_0^\infty \frac{१}{१+य^२}\, \frac{ताय}{१-२अकोज्यागय+अ^२}$ इस में भी यदि श्रेढी

में $\frac{१}{१-२\text{अकोज्यागय}+\text{अ}^२}$ इस का मान ले आवो तो

$$\frac{१}{१-\text{अ}^२}\left[\frac{१}{१+\text{य}^२}+\frac{२\text{अकोज्यागय}}{१+\text{य}^२}+\frac{२\text{अ}^२\text{कोज्या}२\text{गय}}{२+\text{य}^२}+\cdots\right]$$ ऐसा होगा।

इस लिये सीमा के भीतर प्रत्येक पद सम्बन्धि चलों का मान २२६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ले आकर योग करने से अभीष्ट सान्तचल का मान

$$\frac{\pi}{२}\cdot\frac{१}{१-\text{अ}^२}\cdot\frac{१+\text{अइ}^{-\text{ग}}}{१-\text{अइ}^{-\text{ग}}}$$ यह होगा।

२३५। इसी तरह $\int_0^\infty \text{ला}(१-२\text{अकोज्यागय}+\text{अ}^२)\frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२}$

$$=\pi\text{ला}(१-\text{अइ}^{-\text{ग}})$$ २२६ और २२९ प्रक्रम की युक्ति से।

२३६। चलनकलन के ३१४वें प्रक्रम में उपान्तिम समीकरण जो उत्पन्न हुआ है उस में य=र तुल्य मान पीछे से य के स्थान में गय का उत्थापन दे देने से

$$\frac{\text{ज्यागय}}{१-२\text{अकोज्यागय}+\text{य}^२}=\text{ज्यागय}+\text{अज्या}२\text{गय}+\text{अ}^२\text{ज्या}३\text{गय}+\cdots$$

जहाँ अ < १। इस श्रेढी और २२७ प्रक्रम से

$$\int_0^\infty\frac{\text{यज्यागयताय}}{१-२\text{अकोज्यागय}+\text{य}^२}=\frac{\pi}{२(\text{इ}^{\text{ग}}-\text{अ})}$$

यदि ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो २३५ प्रक्रम से भी यह सिद्ध होता है।

२३७। यदि स=कोज्याय+$\sqrt{-१}$ ज्याय तो फ(अ+स) यह यदि ऐसा हो कि इसमें यदि टेलर का सिद्धान्त लगाया जाय तो व्यभिचार न हो

तो टेलर के सिद्धान्त से फ(अ+स) + फ(अ+स$^{-१}$)

$$=२\left\{\text{फ}(\text{अ})+\text{फ}'(\text{अ})\text{कोज्याय}+\frac{\text{फ}''(\text{अ})}{\lfloor २}\text{कोज्या}२\text{य}+\cdots\right\}$$

और $\frac{१-\text{ग}^२}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{ग}^२}$

$$=१+२\text{गकोज्याय}+२\text{ग}^२\text{कोज्या}२\text{य}+२\text{ग}^३\text{कोज्या}३\text{य}+\cdots$$

इस लिये $\int_0^\pi \frac{\text{फ}(\text{अ}+\text{स})+\text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-१})}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{ग}^२}$ ताय

$$=\frac{२\pi}{१-\text{ग}^२}\left\{\text{फ}(\text{अ})+\text{गफ}'(\text{अ})+\frac{\text{ग}^२}{\underline{|२}}\text{फ}''(\text{अ})+\cdots\right\}=\frac{२\pi}{१-\text{ग}^२}\text{फ}(\text{अ}+\text{ग})$$

जहाँ $\text{ग} < १$

इसी तरह दोनों फलों का अन्तर करने से

$$\int_0^\pi \frac{\text{फ}(\text{अ}+\text{स})-\text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-१})}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{ग}^२}\text{ ताय}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{-१}}{\text{ग}}\left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{ग})-\text{फ}(\text{अ})\right\}$$

और $\int_0^\pi \frac{१-\text{गकोज्याय}}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{अ}^२}\left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{स})+\text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-१})\right\}$ताय

$$=\left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{ग})+\text{फ}(\text{अ})\right\}\pi$$

२३८। इस तरह असम्भाव्य संख्या का भी उत्थापन देने से बहुत सान्त-चलों का मान आ जाता है। जैसे

$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\text{ ताय}=\frac{\sqrt{\pi}}{२\text{अ}}$ यह जो २१२ प्रक्रम से सिद्ध है इस में

यदि अ के स्थान में $\frac{१+\sqrt{-१}}{\sqrt{२}}$ ग इसका उत्थापन दें तो

$$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{ग}^२\text{य}^२\sqrt{-१}}\text{ ताय}=\int_0^\infty\{\text{कोज्याग}^२\text{य}^२-\sqrt{-१}\text{ ज्याग}^२\text{य}^२\}\text{ ताय}$$

$$=\int_0^\infty \text{कोज्याग}^२\text{य}^२\text{ताय}-\sqrt{-१}\int_0^\infty\text{ज्याग}^२\text{य}^२\text{ताय}=\frac{१}{\text{ग}}\cdot\frac{१}{१+\sqrt{-१}}\sqrt{\frac{\pi}{२}}$$

$$=\frac{१-\sqrt{-१}}{२\text{ग}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{२}}$$

यहाँ पर सम्भाव्य असम्भाव्य को अलग अलग समान करने से

$$\int_0^\infty \text{कोज्याग}^२\text{य}^२\text{ ताय}=\frac{\sqrt{\pi}}{२\text{ग}\sqrt{२}}$$

और $\int_0^\infty \text{ज्याग}^२\text{य}^२\text{ताय}=\frac{\sqrt{\pi}}{२\text{ग}\sqrt{२}}$

इसी में यदि $ग^२य^२$ के स्थान में र रख लें तो $ताय = \frac{तार}{२ग^२य} = \frac{तार}{२ग\sqrt{र}}$

इस लिये

$$\int_0^\infty \frac{कोज्यारतार}{\sqrt{र}} = \int_0^\infty \frac{ज्यार\ तार}{\sqrt{र}} = \sqrt{\frac{\pi}{२}}$$

इस तरह से हजारहों सान्तचल बुद्धिमानों के बुद्धिबल से निकले हुए हैं और निकलते जाते हैं कहाँ तक लिख कर दिखलावें बुद्धिमानों के लिये इतना ही बहुत है। इस पुस्तक के लिखने से मेरा यही तात्पर्य है कि चलराशि सम्बन्धि प्रायः सब विषयों से थोड़ा बहुत विद्यार्थियों का परिचय हो जाय।

२३९। $\int \frac{ताष}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष)}} = दै_१(ग,ष)$। $\int \sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष)}ताष = दै_२(ग,ष)$ और

$$\int \frac{ताष}{(१+अज्या^२ष)\sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष)}} = दै_३(ग,अ,ष)$$ ऐसा मान लो जहाँ $ग < १$ तो यदि

$दै_१(ग,ष) + दै_१(ग,ष_१) = दै_१(ग,इ_१)$ जहाँ $इ_१$ एक स्थिराङ्क है तो

$कोज्याष\ कोज्याष_१ - ज्याषज्याष_१\sqrt{(१-ग^२ज्या^२इ_१)} = कोज्याइ_१$ ऐसा होगा। इस को सिद्ध करने के लिये मान लो कि ष और $ष_१$ ये दोनों नये चलराशि ट के फल हैं तो दिये हुए समीकरण का नये चलराशि के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष)}} \cdot \frac{ताष}{ताट} + \frac{१}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष_१)}} \cdot \frac{ताष_१}{ताट} = ० \cdots \quad (१)$$

कल्पना करो कि ट ऐसा है जिस से $\frac{ताष}{ताट} = \sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष)}$

तो (१) समीकरण से $\frac{ताष_१}{ताट} = -\sqrt{(१-ग^२ज्या^२ष_१)}$

दोनों का वर्ग कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$\frac{ता^२ष}{ताट^२} = -ग^२ज्याषकोज्याष$, $\frac{ता^२ष_१}{ताट^२} = -ग^२ज्याष_१कोज्याष_१$

इनके योगान्तर से

$\frac{ता^२(ष\pm ष_१)}{ताट^२} = -\frac{ग^२}{२}(ज्या२ष \pm ज्या२ष_१$

यदि $\text{ष} + \text{ष}_1 = \text{फि}, \quad \text{ष} - \text{ष}_1 = \text{फी}$ तो

$$\frac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{ताट}^2} = -\text{ग}^2\text{ज्याफिकोज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}^2\text{फी}}{\text{ताट}^2} = -\text{ग}^2\text{ज्याफीकोज्याफि}$$

और $$\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \left(\frac{\text{ताप}}{\text{ताट}}\right)^2 - \left[\frac{\text{ताष}}{\text{ताट}}\right]^2 = -\text{ग}^2\text{ज्याफिज्याफी}$$

इस लिये $$\frac{\dfrac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{ताट}^2}}{\dfrac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\dfrac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}} = \text{कोस्पफी}, \quad \frac{\dfrac{\text{ता}^2\text{फी}}{\text{ताट}^2}}{\dfrac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\dfrac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}} = \text{कोस्पफि}$$

इस लिये

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\left(\text{ला}\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\text{लाज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\left(\text{ला}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\text{लाज्याफि}$$

इस लिये $$\text{ला}\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{लाज्याफी} + \text{स्थिराङ्क}$$

इस लिये $$\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{आ}\cdot\text{ज्याफी}$$

और इसी तरह $$\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{का}\cdot\text{ज्याफि} \qquad \cdots\cdots\cdots (२)$$

जहाँ आ और का स्थिराङ्क है।

इस कारण से $$\text{आज्याफी}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{काज्याफि}\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}$$

चलानयन से, $\text{आकोज्याफी} = \text{काकोज्याफी} + \text{स्थिराङ्क}$ $\cdots\cdots\cdots$ (३)

और प्रथम मूल समीकरण से स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $\text{ष}_1 = 0$ तो

$$\text{दै}_1(\text{ग},\text{ष}) = \text{दै}_1(\text{ग},\text{इ}_1)$$

इस लिये तब $\text{ष} = \text{इ}_1$ और $\text{फि} = \text{फी} = \text{इ}_1$

(३) से $(\text{आ} - \text{का})\,\text{कोज्याइ}_1 = \text{स्थि}$

इस लिये $\text{आकोज्या}(\text{ष} - \text{ष}_1) = \text{काकोज्या}(\text{ष} + \text{ष}_1) + (\text{आ} - \text{का})\,\text{कोज्याइ}_1$

और $(\text{आ} - \text{का})\,\text{कोज्याषकोज्याष}_1 + (\text{आ} + \text{का})\,\text{ज्याष ज्याष}_1$

$$= (\text{आ} - \text{का})\,\text{कोज्याइ}_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (४)$$

(२) में $\dfrac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष})} - \sqrt{(1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष}_1)}$ इस का

और $\dfrac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष})} + \sqrt{(1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष}_1)}$ इस का

उत्थापन देने से और $\text{ष}_1 = 0$ मानने से

$\sqrt{(१—ग^२ज्या^२इ_१)}—१$ = आज्याइ$_१$

और $\sqrt{(१—ग^२ज्या^२इ_१)}+१$ = काज्याइ$_१$

$\therefore \quad \frac{२\sqrt{(१—ग^२ज्या^२इ_१)}}{ज्याइ_१}$ = आ + का, । — $\frac{२}{ज्याइ_१}$ = आ—का

इसका उत्थापन (४) में देने से

कोज्याषकोज्याष$_१$ – ज्यापज्याष$_१\sqrt{(१—ग^२ज्या^२इ_१)}$

= कोज्याइ$_१$ यह सिद्ध हुआ

२४० । २३९ प्रक्रम में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उस में यदि समशोधन कर वर्ग कर डालो तो

(कोज्यापकोज्याप$_१$—कोज्याइ$_१)^२$ = (१–ग^{२}ज्या^{२}इ$_१$)ज्या^{२}पज्या^{२}प$_१$

इस लिये

कोज्या^{२}षकोज्या^{२}प$_१$—२कोज्याइ$_१$कोज्याषकोज्याप$_१$ + कोज्या^{२} इ$_१$

= ज्या^{२}षज्या^{२}ष$_१$—ग^{२}ज्या^{२}इ$_१$ज्या^{२}पज्या^{२}प$_१$ और ज्या^{२}प + कोज्या^{२}प = १

इस लिये

ज्या^{२}ष – ज्या^{२}षज्या^{२}ष$_१$ + कोज्या^{२}ष + कोज्या^{२}षकोज्या^{२}ष$_१$

— २कोज्याइ$_१$कोज्याषकोज्याष$_१$ + कोज्या^{२}इ$_१$

= ज्या^{२}षकोज्या^{२}ष$_१$ + कोज्या^{२}षकोज्या^{२}प$_१$ + कोज्या^{२}प

— २कोज्याइ$_१$कोज्याषकोज्याष$_१$ + कोज्या^{२}इ$_१$

= कोज्या^{२}ष + कोज्या^{२}प$_१$ + कोज्या^{२}इ$_१$ – २कोज्याइ$_१$कोज्यापकोज्याप$_१$

= १ – ग^{२}ज्या^{२}इ$_१$ज्या^{२}पज्या^{२}प$_१$

कोज्या^{२}ष$_१$कोज्या^{२}इ$_१$ जोड़ कर पक्षान्तरानयन करने से

(कोज्याष – कोज्याष$_१$कोज्याइ$_१)^२$

= १ – कोज्या^{२}ष$_१$ – कोज्या^{२}इ$_१$ + कोज्या^{२}ष$_१$कोज्या^{२}इ$_१$

— ग^{२}ज्या^{२}इ$_१$ज्या^{२}षज्या^{२}ष$_१$

= ज्या^{२}ष$_१$ज्या^{२}इ$_१$ (१ – ग^{२}ज्या^{२}प)

इस लिये कोज्याप = कोज्याष$_१$कोज्याइ$_१$ + ज्याप$_१$ज्याइ$_१\sqrt{(१ – ग^२ज्या^२ष)}$

यहाँ पर धनात्मक मूल लिया है क्योंकि जब ष = ० तो यहाँ ष$_१$ = इ$_१$

२४१। दै$_१$(ग,ष) इस का रूप ग,ष के बदलने से इसी चाल का हो जाता है केवल स्थिराङ्क गुणक अधिक हो जाता है जैसे यदि

स्पष = $\frac{ज्या२ष_१}{ग + कोज्या२ष_१}$ तो ष$_१$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\text{कोज्या}^२ष}\ \frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_१} = \frac{२(१+\text{गकोज्या}२ष_१)}{(ग+\text{कोज्या}२ष_१)^२}$$

इस लिये $\frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_१} = \frac{२(१+\text{गकोज्या}२ष_१)}{१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२}$

और $१ - ग^२\text{ज्या}^२ष = १ - \frac{ग^२\text{ज्या}^२२ष_१}{१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२}$

$$= \frac{१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२\text{कोज्या}^२२ष_१}{१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२}$$

इस लिये $\int \frac{\text{ताष}}{\sqrt{(१-ग^२\text{ज्या}^२ष)}}$

$$= \int \frac{२(१+\text{गकोज्या}२ष_१)}{१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२} \cdot \frac{\sqrt{(१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२)}}{१+\text{गकोज्या}२ष_१}\,\text{ताष}_१$$

$$= २\int \frac{\text{ताष}_१}{\sqrt{(१+२\text{गकोज्या}२ष_१+ग^२)}} = २\int \frac{\text{ताष}_१}{\sqrt{(१+२ग-४ग\text{ज्या}^२ष_१+ग^२)}}$$

$$= \frac{२}{१+ग}\int \frac{\text{ताष}_१}{\sqrt{\left\{१-\frac{४ग}{(१+ग)^२}\text{ज्या}^२ष_१\right\}}}$$

यहाँ पर कोई स्थिराङ्क जोड़ने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि ष = ० तो $ष_१ = ०$ होता है।

अब ऊपर के चल में यदि $ग_१^२ = \frac{४ग}{(१+ग)^२}$ तो

$$\text{दै}_१\,(ग, ष) = \frac{२}{१+ग}\,\text{दै}_१\,(ग_१, ष_१)$$

पहले जो स्पष $= \frac{\text{ज्या}२ष_१}{ग+\text{कोज्या}२ष_१}$ ऐसा माना है इस पर से सिद्ध कर सकते हो कि ग ज्याष = ज्या $(२ष_१ - ष)$

और जब $ग_१^२ = \frac{४ग}{(१+ग)^२}\ \therefore \frac{ग_१^२}{ग^२} = \frac{४}{ग(१+ग^२)}$

परन्तु $ग < १$ इस लिये $४ > ग(१+ग)^२$ और $ग_१^२ > ग^२\ \therefore ग_१ > ग$

इस लिये ग से $ग_१$ बड़ा ठहरा।

इस में यदि $ष_१ = \frac{\pi}{२}$ तो $ष = \pi$ इस लिये

$$\text{दै}_१(ग, \pi) = \frac{२}{१+ग}\,\text{दै}_१\left(ग_१, \frac{\pi}{२}\right) = २\,\text{दै}_१\left(ग, \frac{\pi}{२}\right)\cdots$$

$दै_1$ (ग,ष) इस में ग को मध्यस्थ, और ष को अग्रांश कहते हैं और $दै_1$ (ग,ष) = ० यदि ष = ० और यदि ष = $\frac{\pi}{2}$ तो पूर्णचल का मान = $दै_1$ (ग,$\frac{\pi}{2}$) यह है। इस लिये $\frac{\pi}{2}$ को पूर्ण अग्रांश कहते हैं।

यदि ७७ वें प्रक्रम के साथ तुलना करो तो जान पड़ेगा कि $दै_2$ (ग,ष) यह लघुव्यासाग्र से चाप की गणना करें तो दीर्घवृत्त के चाप को प्रकाश करता है और आगे के प्रक्रमों से जान पड़ेगा कि $दै_1$ (ग, ष), $दै_2$ (ग,ष, और $दै_3$ (अ, ग, ष,) इन तीनों में परस्पर सम्बन्ध है इस लिये इन तीनों को क्रम से प्रथम, द्वितीय और तृतीय दैर्घवृत्तीय चल कहते हैं।

यद्यपि इन तीनों के ठीक ठीक मान नहीं निकलते तथापि इन के अव्यक्त मानों के सम्बन्ध से अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं। इन के सिद्धान्तों पर बुद्धिमानों ने अलग एक स्वतन्त्र दैर्घवृत्तीयचल के नाम से पुस्तक ही बना डाली है। अभीं सन् १८७३ ई० में ब्रिअट (Briot) और बौकेट (Bouquet) ने इसी विषय के पुस्तक का एक बड़ा भारी प्रथम खण्ड प्रकाश किया है।

तीसरे दैर्घवृत्तीयचल में जो अ, एक और थिराङ्क है उसे परिमिति कहते हैं और सर्वत्र ग सर्वदा १ से कम माना गया है।

२४२। इस प्रक्रम में एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जो प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से उत्पन्न होता है।

२३९ प्रक्रम में सिद्ध हुआ है कि यदि $दै_1$ (ग,ष) + $दै_1$ (ग,$ष_1$) = दै (ग, $इ_1$) तो

$$कोज्याष कोज्याष_1 - ज्याष ज्याष_1 \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 इ_1)} = कोज्या इ_1$$

अब दिखलाते हैं कि

यदि $कोज्याष कोज्याष_1 - ज्याष ज्याष_1 \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 इ_1)} = कोज्या इ_1$

तो $दै_2$ (ग,ष) + $दै_2$ (ग,$ष_1$) − $दै_2$ (ग,$इ_1$)

= $ग^2 ज्याष\, ज्याष_1\, ज्याइ_1$ ऐसा होगा।

यहाँ दिये हुए समीकरण के धर्म से स्पष्ट है कि $ष_1$ यह ष का कोई फल होगा

इस लिये मानो कि, $दै_2$ (ग,ष) + $दै_2$(ग,$ष_1$) − $दै_2$(ग,$इ_1$) = फ(ष)

इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$फ'(ष) = \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 ष)} + \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 ष_1)}\, \frac{ताष_1}{ताष}$$

$$= \frac{\text{कोज्याप} - \text{कोज्याप}_1\text{कोज्याइ}_1}{\text{ज्याप}_1\text{ज्याइ}_1}$$

$$+ \frac{\text{कोज्याप}_1 - \text{कोज्यापकोज्याइ}_1}{\text{ज्यापज्याइ}_1} \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}} \quad (\text{२४० प्रक्रम से})$$

$$= \frac{\text{ता}}{\text{ताप}} \{ \text{ज्या}^2\text{प} + \text{ज्या}^2\text{प}_1 + 2\ \text{कोज्यापकोज्याप}_1\text{कोज्याइ}_1 \}$$

$$\times \frac{1}{\text{२ज्यापज्याप}_1\text{ज्याइ}_1}$$

परन्तु $\text{ज्या}^2\text{प} + \text{ज्या}^2\text{प}_1 + \text{२कोज्यापकोज्याप}_1\text{कोज्याइ}_1$

$= 1 + \text{कोज्याइ}_1 + \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{पज्या}^2\text{प}_1\text{ज्या}^2\text{इ}_1$ (२४० ही प्रक्रम से)

इसलिये $\quad \text{फ}'(\text{प}) = \text{ग}^2\text{ज्याइ}_1 \dfrac{\text{ता}\ (\text{ज्यापज्याप}_1)}{\text{ताप}}$

इस लिये चलानयन से

$\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^2\text{ज्याइ}_1\text{ज्यापज्याप}_1$

स्थिराङ्क जोड़ने की कुछ आवश्यकता नहीं है क्योंकि जब $\text{प} = 0$ तो $\text{फ}(\text{प}) = 0$ इस लिये

$\text{दै}_2(\text{ग},\text{प}) + \text{दै}_2(\text{ग},\text{प}_1) - \text{दै}(\text{ग},\text{इ}_1) = \text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^2\text{ज्यापज्याप}_1\text{ज्याइ}_1$

इस में यदि $\text{इ}_1 = \frac{\pi}{2}$ तो $\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^2\text{ज्यापज्याप}_1$,

और दिये हुए समीकरण का रूप

$\text{कोज्यापकोज्याप}_1 - \text{ज्यापज्याप}_1 \sqrt{(1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1)}$

$= \text{कोज्यापकोज्याप}_1 - \text{ज्यापज्याप}_1 \sqrt{(1 - \text{ग}^2)} = \text{कोज्याइ}_1 = 0$

यह ठीक फ्यागननी (Fagnani) के सिद्धान्त के समान फल को दिखलाता है क्योंकि ८५ प्रक्रम के (१) उदाहरण के अन्त में जो

$\text{इ}^2\text{य}^2\text{य}'^2 - \text{अ}^2(\text{य}^2 + \text{य}'^2) + \text{अ}^4 = 0$ यह समीकरण उत्पन्न हुआ है इस में

य, य' का जो क्रम से $\dfrac{\text{अकोज्याप}}{\sqrt{(1 - \text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प})}}, \dfrac{\text{अकोज्याप}'}{\sqrt{(1 - \text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प}')}}$

मान मान लो तो

$$\text{इ}^2\text{कोज्या}^2\text{पकोज्या}^2\text{प}' - \text{कोज्या}^2\text{प}(1 - \text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प}') - \text{कोज्या}^2\text{प}'(1 - \text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प})$$
$$+ (1 - \text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प})(1 - \text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प}') = 0,$$

अर्थात् $इ^2 ज्या^2 प ज्या^2 प' + इ^2 (१ - ज्या^2 प - ज्या^2 प' - ज्या^2 प ज्या^2 प') + ज्या^2 प + ज्या^2 प' = ०$ अर्थात्

$$इ^2 (इ^2 - १) ज्या^2 प ज्या^2 प' + (इ^2 - १)(१ - ज्या^2 प - ज्या^2 प') = ०$$

$(इ^2 - १)$ का भाग दे देने से

$$इ^2 ज्या^2 प ज्या^2 प' + १ - ज्या^2 प - ज्या^2 प' = ०$$

इस पर से रूपान्तर करने से

$$कोज्याप कोज्याप_१ = ज्याप ज्याप' \sqrt{१ - इ^2}$$

अथवा, $$ज्या^2 प = \frac{कोज्या^2 प'}{१ - इ^2 ज्या^2 प'}$$

और $$ज्या^2 प' = \frac{कोज्या^2 प}{१ - इ^2 ज्या^2 प}$$

इस प्रकार से प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से सैकड़ों सिद्धान्त बन जाते हैं।

२४३। $$दै_३ (अ, ग, प) = \int \frac{ताप}{(१ + अज्या^2 प)\sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 प)}}$$

$$= \frac{दै_१ (ग, प)}{१ + अज्या^2 प} - \int दै_१ (ग, प)\ ता \left(\frac{१}{१ + अज्या^2 प}\right)$$

इस प्रकार से खण्डचलानयन की रीति से जो $दै_३$ (अ, ग, प) का स्वरूप सिद्ध होता है इससे जान पड़ता है कि $दै_१$ (ग, प) और $दै_३$ (अग, प) में भी परस्पर सम्बन्ध है।

लेजेण्ड्र (Legendre.) ने पहले दो दैर्घवृत्तीय चलों के मान जानने के लिये एक सारणी बनाई है और उसमें स्वल्पान्तर से तीसरे का मान जानने के लिये भी विधि लिखा है। सारणी बनाने का मूल प्रकार २७ प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण है।

२४४। यदि फ(य) किसी खेत में एक तरफ के डाँड़े का मान हो तो य के स्थान में अ, अ + च, अ + २च, अ + ३च, · · · अ + (न - १) च इनका उत्थापन देने से उस खेत के भीतर उसी तरफ़ के फ(अ), फ(अ + च), फ(अ + २च), · · · · · इत्यादि न डाँड़ों के प्रमाण होंगे इस लिये, इन डाँड़ों का मध्यम मान जिसे उर्दू में औसत बोलते हैं।

साधारण रीति से वा लीलावती में लिखे हुए भास्कराचार्य के "गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या । स्थानकमित्या सममिति" इस प्रकार से ।

$$\frac{\text{फ}(\text{अ})+\text{फ}(\text{अ}+\text{च})+\text{फ}(\text{अ}+\text{२च})+\cdots+\text{फ}\{\text{अ}+(\text{न}-\text{१})\,\text{च}\}}{\text{न}}$$

कल्पना करो कि $\text{क}-\text{अ}=\text{नच}$

इस लिये डाड़ों का मध्यम मान

$$\frac{\text{च}[\,\text{फ}(\text{अ})+\text{फ}(\text{अ}+\text{च})+\text{फ}(\text{अ}+\text{२च})+\cdots+\text{फ}\{\text{अ}+(\text{न}-\text{१})\text{च}\}\,]}{\text{क}-\text{अ}}$$

कल्पना करो कि क − अ स्थिर संख्या के भीतर अनन्त स्थानों के डाड़ों का मध्यम मान जानना है तो न का प्रमाण अनन्त और च का मान शून्य हो जायगा ऐसी दशा में २ वा ४० वें प्रक्रम से डाड़ों का यथार्थ मध्यम मान $\int\frac{{}_{\text{अ}}^{\text{क}}\,\text{फ}(\text{य})\,\text{ताय}}{\text{क}-\text{अ}}$ यह होगा क्योंकि औसत में जितने ही स्थानों को बढ़ाते जाते हैं उतना ही औसत सूक्ष्म होता चला जाता है ।

इस लिये य के अ, क के भीतर के मानों में यदि फ(य) का मध्यम मान निकालना हो तो $\int\frac{\text{फ}(\text{य})\text{ताय}}{\text{क}-\text{अ}}$ इस का अ, क सीमा के भीतर सान्तचल ले आवो ।

जैसे किसी ने प्रश्न किया कि जिस वृत्त का व्यासार्द्ध ग है उसके परिधि पर एक स्थिर विन्दु मान कर वहाँ से वृत्तान्तर्गत प्रत्येक विन्दुओं की दूरी जो होंगी उनका मध्यम मान क्या होगा ।

यहाँ यदि वृत्त के फल का न तुल्य विभाग कर डालें जहाँ न = ∞ तो स्पष्ट है कि हर एक विभाग विन्दु रूप होंगे इसलिये प्रति विभागों की दूरी स्थिर विन्दु से क्रम से $\text{श्रु}_{१}, \text{श्रु}_{२}, \text{श्रु}_{३}, \cdots \text{श्रु}_{\text{न}}$ ये हों तो इन का मध्यम मान $\frac{१}{\text{न}}(\text{श्रु}_{१}+\text{श्रु}_{२}+\cdots+\text{श्रु}_{\text{न}})$ यह होगा ।

इसमें अंश हर को श्रु△ष△श्रु से गुण देने से

$$\frac{\{\text{श्रु}_{१}+\text{श्रु}_{२}+\cdots+\text{श्रु}_{\text{न}}\}\,\text{श्रु}\;\text{ष}\;\text{श्रु}}{\text{नश्रु}\triangle\text{ष}\triangle\text{श्रु}}$$

यहाँ १२५ वें प्रक्रम से श्रु△ष△श्रु यह क्षेत्रफल के अत्यल्प विभाग का मान होगा यदि, △ष,△श्रु ताष, ताश्रु अर्थात् शून्य के तुल्य हो जायँ ।

य	ला₁₀गा(१ + य)	$\triangle$ (∓)	$\triangle^2$(+)	$\triangle^3$(−)	९ स्थानों तक $\triangle^3$ जानने के लिये अङ्क
.२६	९५६ ३५९ १६९ ६४०	९३ ३५३ ४६३	५१३ ७२३	५६३	१११ ७७८ ३३३
.२७	९५५ ४४८ ६८५ २३४	८८ २४१ ४२७	५०८ १४६	५५४	९८८ ९५५ २३३
.२८	९५४ ५८९ ०७१ ५५३	८३ १८४ ६५६	५०२ ६८०	५३९	९८८ ६५२ ४२९
.२९	९५३ ७७९ ७८१ ०२९	७८ १८२ ०२९	४९७ ३२८	५३१	८६८ ५३५ ०३८
.३०	९५३ ०२० २७७ १५०	७३ २३२ ४५६	४९२ ०८१	५१९	२८३ ७२४ १२९
.३१	९५२ ३१० ०३४ १४१	६८ ३३४ ८८३	४८६ ९३७	५०८	९६४ ५६२ ३९८
.३२	९५१ ६४८ ५३६ ५५५	६३ ४८८ २८३	४८१ ८९७	५०१	७७५ ७३२ १४९
.३३	९५१ ०३५ २७९ ४८१	५८ ६९१ ६५६	४७६ ९५१	४८७	०८३ ८४४ ३०४
.३४	९५० ४६९ ७६७ २५४	५३ ९४४ ०३३	४७२ १०२	४८०	६८९ ५४५ ३४९
.३५	९४९ ९५१ ५१४ ११९	४९ २४४ ४७६	४६७ ३४९	४७२	०१० ८४३ ५४०
.३६	९४९ ४८० ०४३ ८११	४४ ५९२ ०६५	४६२ ६८४	४६२	२९९ ८९६ ५४४
.३७	९४९ ०५४ ८८८ ६२२	३९ ९८५ ९०४	४५८ १०६	४५४	२०१ ०९७ ९४५
.३८	९४८ ६७५ ५९० २२३	३५ ४२५ १३१	४५३ ६१५	४४७	३२२ २०९ ०८७
.३९	९४८ ३४१ ६९८ ३६३	३० ९०८ ८९९	४४९ २०५	४३६	६५२ ५२२ ०१८
.४०	९४८ ०५२ ७७१ ४११	२६ ४३६ ३८८	४४४ ८७८	४२९	६८७ ५४३ ४३९
.४१	९४७ ८०८ ३७५ ७८९	२२ ००६ ७९६	४४० ६३०	४२१	२८७ ८८६ ५४४
.४२	९४७ ६०८ ०८५ ८२३	१७ ६१९ ३४३	४३६ ४५७	४१४	०४० ९१८ ८६७
.४३	९४७ ४५१ ४८३ ५४२	१३ २७३ २७५	४३२ ३६०	४०७	४४३ ४२१ ००९
.४४	९४७ ३३८ १५८ ४७४	८ ९६७ ८४४	४२८ ३३६	४००	८५८ ४७२ ५३२
.४५	९४७ २६७ ७०७ ४५२	४ ७०२ ३३८	४२४ ३८२	३९२	००० ८८९ ५७५
.४६	९४७ २३९ ७३४ ४३०	— ४७६ ०५२	४२० ४९८	३८५	३४३ २०१ २८८
.४७	९४७ २५३ ८५० ३०२	+३७११ ६९८	४१६ ६८२	३७८	८८४ ६५४ ४२१
.४८	९४७ ३०९ ६७२ ७२६	७ ८६१ ५८०	४१२ ९३२	३७४	००० ८८० ६६६
.४९	९४७ ४०६ ८२५ ९५८	११ ९७४ २४४	४०९ २४४	३६५	५४३ ३१४ ८२९
.५०	९४७ ५४४ ९४० ६८३	१६ ०५० ३२४	४०५ ६२०	३५९	९७८ ६६६ ४५३

य	ला₁₀गा(१+य)	$\triangle$(+)	$\triangle^2$+()	$\triangle^3$ (−)	९ स्थानों तक $\triangle^2$ जानने के लिये अङ्क
.५१	९४७ ७२३ ६५३ ८६२	२० ०९० ४३९	४०२ ०५७	३५३	२४९ १०० ९८७
.५२	९४७ ९४२ ६०८ ५७५	२४ ०९५ १९३	३९८ ५५४	३४८	७५६ ४४४ ५११
.५३	९४८ २०१ ४५३ ८७५	२८ ०६५ १७५	३९५ १०९	३४२	२०९ ९९८ ७७६
.५४	९४८ ४९९ ८४४ ६४२	३२ ००० ९६१	३९१ ७२०	३३७	४६४ २५१ २२१
.५५	९४८ ८३७ ४४१ ४४७	३५ ९०३ १११	३८८ ३८६	३३१	७२८ ९५९ ६७४
.५६	९४९ २१३ ९१० ४१०	३९ ७७२ १७३	३८५ १०८	३२७	३३६ १३१ २२९
.५७	९४९ ६२८ ९२३ ०७८	४३ ६०८ ६८३	३८१ ८८१	३१९	००७ ७८७ ६५७
.५८	९५० ०८२ १५६ २८९	४७ ४१३ १६५	३७८ ७०५	३१३	४४५ ११३ २०९
.५९	९५० ५७३ २९२ ०५८	५१ १८६ १२६	३७५ ५८३	३११	०७८ ९८५ ७६५
.६०	९५१ १०२ ०१७ ४५०	५४ ९२८ ०६८	३७२ ५०७	३०४	३५४ ३२२ ११०
.६१	९५१ ६६८ ०२४ ४६७	५८ ६३९ ४७८	३६९ ४८१	३०२	९८१ ६८७ ८७४
.६२	९५२ २७१ ००९ ९३८	६२ ३२० ८३०	३६६ ५०१	२९६	५४६ ३१४ ३२०
.६३	९५२ ९१० ६७५ ४०२	६५ ९७२ ५९३	३६३ ५६७	२९१	१०९ १६१ ७५८
.६४	९५३ ५८६ ७२७ ०१२	६९ ५९५ २२१	३६० ६७८	२८७	६६५ ४५३ ४३२
.६५	९५४ २९८ ८७५ ४२८	७३ १८९ १५८	३५७ ८३३	२८३	२९२ ३७८ २२७
.६६	९५५ ०४६ ८३५ ७१२	७६ ७५४ ८४०	३५५ ०३१	२७९	६७८ ५६७ ३५४
.६७	९५५ ८३० ३२७ २३८	८० २९२ ६९३	३५२ २७१	२७४	३३३ १३० ३१९
.६८	९५६ ६४९ ०७३ ५९६	८३ ८०३ १३२	३४९ ५५३	२६९	१९९ ८६८ ७५८
.६९	९५७ ५०२ ८०२ ४९८	८७ २८६ ५६९	३४६ २७३	२६६	५४६ १५५ ३०४
.७०	९५८ ३९१ २४५ ६९२	९० ७४३ ३९६	३४४ २३४	२६१	०२० १०८ ०९७
.७१	९५९ ३१४ १३८ ८७२	९४ १७४ ००७	३४१ ६३५	२६१	६४० ७५६ ५५६
.७२	९६० २७१ २२१ ५९२	९७ ५७८ ७०४	३३९ ०७०	२५२	६१४ ५०२ ३११
.७३	९६१ २६२ २३७ २०६	१०० ९५८ ०९९	३३६ ५४५	२५०	०१८ ००७ ८७८
.७४	९६२ २८६ ९३२ ७४१	१०४ ३१२ ३२०	३३४ ०५८	२४९	४५० ६३४ ६३४
.७५	९६३ ३४५ ०५८ ८७४	१०७ ६४१ ८०३	३३१ ६०२	२४५	२३३ १३१ १०१

य	ला₁₀गा(१+य)	△(+)	△²[+]	△³[−]	९ स्थानोंतक △³ जानने के लिये अङ्क
.७६	९६४ ४३६ ३६९ ८१०	११० ९४६ ९०१	३२९ १८२	२४१	९९० ८८९ ७८७
.७७	९६५ ५६० ६२३ २६९	११४ २२७ ९५६	३२६ ७९६	२३७	५७६ ४७४ ४४५
.७८	९६६ ७१७ ५८० ३२२	११७ ४८५ ३०६	३२४ ४४३	२३२	३४२ १४० १११
.७९	९६७ ९०७ ००५ ४१२	१२० ७१९ २८०	३२२ १२४	२३०	००८ ०८८ ९७८
.८०	९६९ १२८ ६६६ २४१	१२३ ९३० २०१	३१९ ८३६	२२६	८५७ ५७५ ३६४
.८१	९७० ३८२ ३३३ ७११	१२७ ११८ ३८६	३१७ ५८०	२२४	३४३ ३२२ २१२
.८२	९७१ ६६७ ७८१ ८६४	१३० २८४ १४६	३१५ ३५४	२२१	०१९ ००९ ९७०
.८३	९७२ २८४ ७८७ ८१६	१३३ ४२७ ७८४	३१३ १५८	२१७	८८६ ६९४ ७५६
.८४	९७४ ३३३ १३१ ६९९	१३६ ५४२ ५९८	३१० ९९२	२१४	५५४ ४३३ ४३१
.८५	९७५ ७१२ ५९६ ५९९	१३९ ६४९ ८८१	३०८ ८५६	२१४	०२२ ११९ ११८
.८६	९७७ १२२ ९६८ ४९९	१४२ ७२८ ९२०	३०६ ७४७	२१०	९९९ ७८९ ८६५
.८७	९७८ ५६४ ०३६ २२५	१४५ ७८६ ९९५	३०४ ६६७	२०९	५७६ ५५६ ३६३
.८८	९८० ०३५ ५९१ ३८८	१४८ ८२४ ३८४	३०२ ६१२	२०५	३३४ २३३ १२१
.८९	९८१ ५३७ ४२८ ३३३	१५१ ८४१ ३५५	३०० ५८५	२०३	९२० ००१ ७२६
.९०	९८३ ०६९ ३४४ ०८६	१५४ ८३८ १७३	२९८ ५८५	२०१	७९७ ९६८ ५९६
.९१	९८४ ६३१ १३८ ३००	१५७ ८१५ १०१	२९६ ६०८	१९५	७५५ ६४५ ४५३
.९२	९८६ २२२ ६१३ २११	१६० ७७२ ३९१	२९४ ६५९	१९४	३३४ १४१ २२२
.९३	९८७ ८४३ ५७३ ५८६	१६३ ७१० २९६	२९२·७३३	१८९	४८१ १०८ २७१
.९४	९८९ ४९३ ८२६ ६७६	१६६ ६२९ ०६१	२९० ८३२	१८७	९८९ ८६८ ७८५
.९५	९९१ १७३ १८२ १७२	१६९ ५२८ ९२६	२८८ ९५७	१८७	५७७ ५५४ ५४५
.९६	९९२ ८८१ ४५२ १५६	१७२ ४१० १३१	२८७ १०३	१८४	४३४ ३३३ २२२
.९७	९९४ ६१८ ४५१ ०६३	१७५ २७२ ९०६	२८५ २७३	१८२	२०३ ९२१ ८११
.९८	९९६ १८३ ९९५ ६३२	१७८ ११७ ४८१	२८३ ४६४	१७७	२७१ ६१६ ०६९
.९९	९९८ ३७७ ९०४ ८६८	१८० ९४४ ०७९	२८१ ६७९	१७७	६९४ ९५६ ६६५
१.००	००० ००० ००० ०००	१८३ ७५२ ९२०	२७९ ९१६	१७५	....

इस सारणी में (१) ऊर्ध्वाधर कोष्ठ में '०१ वृद्धि से य के मान १'०० तक लिखे हैं। दूसरे में उनके वश से लागा (१+य) का मान १० आधार में १२ दशमलव स्थानों तक लिखा है गा(१+य) का मान य के ०,१ के भीतर रूप से अल्प होता है इस लिये इस कोष्ठ में लघुरिक्थ के मान में पूर्णाङ्क को छोड़ दिया है पूर्णाङ्क सर्वत्र अपने मन से—१ वा इस में १० जोड़ कर ९ समझ लेना चाहिये। प्रायः ९ पूर्णाङ्क ही ग्रहण करना उत्तम है जैसा कि त्रिकोणमिति फलों के लघुरिक्थ में किया जाता है।

तीसरे कोष्ठ में एक दशमलव स्थान वर्द्धित संख्याओं के लघुरिक्थों के अन्तर के अन्तिम अङ्क हैं। जैसे य = '२२ के सामने इस में जो संख्या— ११४ ३७७ ८४१ है इससे समझना चाहिये कि लागा (१'२२१)—लागा(१'२२०)

= — '००० ११४ ३७७ ८४१।

चौथे और पाँचवें कोष्ठ में जहाँ तीन दशमलव स्थान से अधिक स्थान य में हों वहाँ का लागा(१+य) सूक्ष्म ले आने के लिये दूसरा और तीसरा अन्तर लिखा है (चलनकलन का ८५—८६ प्रक्रम देखो) इसमें भी आदि के दशमलव जो कि ० है छोड़ दिये गये हैं। सर्वत्र वाईं ओर इतने शून्य रख दशमलव का चिह्न रखो जिस में १२ दशमलव स्थान हों। छठवें कोष्ठ में तीसरे दशमलव स्थान के १ से लेकर ९ तक के मान में लघुरिक्थ जानने के लिये क्रम से तीसरे अन्तर का अन्तिम अंक हैं। जो तीसरे अन्तर के अन्तिम स्थानीय अङ्क के स्थान में उत्थापन देने से सभों का तीसरा अन्तर बनाते हैं परन्तु यदि तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क का मान उसके किसी अङ्क से न्यून हो तो उपान्तिम अङ्क में एक न्यून कर तब उसके आगे इसके उस अङ्क को रख कर तीसरा अन्तर बनाना जैसा कि '४६८, और '४६९ में है जैसे लागा(१'४६०), लागा(१'४६१), लागा (१'४६२) · · · लागा(१'४६९) इन का मान जानना हो तो '४६ के सामने का अङ्क लेने से

३,४,३,२,०,१,२,८,८ ये हुए इन का उत्थापन तीसरे अन्तर (—३८५) के

$\triangle^{३}$ के लिये अङ्क	$\triangle^{३}$	$\triangle^{२}$	$\triangle$	लागा(१ + य)				य
०	−३८५	४२०४९८	−४७६०५२	९४७	२३९	७३४	४३०	·४६०
३	३८३	४२०११३	−५५५५४	९४७	२३९	२५८	३७८	·४६१
४	३८४	४१९७३०	+३६४५५९	९४७	२३९	२०२	८२४	·४६२
३	३८३	४१९३४६	७८४२८९	९४७	२३९	५६७	३८३	·४६३
२	३८२	४१८९६३	१२०३६३५	९४७	२४०	३५१	६७२	·४६४
०	३८०	४१८५८१	१६२२५९८	९४७	२४१	५५५	३०७	·४६५
१	३८१	४१८२०१	२०४११७९	९४७	२४३	१७७	९०५	·४६६
२	३८२	४१७८२०	२४५९३८०	९४७	२४५	२१९	०८४	·४६७
८	३७८	४१७४३८	२८७७२००	९४७	२४७	६७८	४६४	·४६८
८	३७८	४१७०६०	३२९४६३८	९४७	२५०	५५५	६६४	·४६९
		४१६६८२	३७११६९८	९४७	२५३	५५०	३०२	·४७०

अन्तिम अङ्क के स्थान में देने से और अन्त के दो अङ्कों ८, ८ के तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क, ५ से बड़ा होने के कारण तीसरे अन्तर के उपान्तिम अङ्क ८ में एक कम कर देने से ·४६१, ·४६२, · · · · ·४६९ का तीसरा अन्तर बना फिर इनका संस्कार बीजगणित की रीति से धन ऋण के वश ·४६० के दूसरे अन्तर में करने से नवों का दूसरा अन्तर बन गया फिर इनका संस्कार ·४६० के प्रथम अन्तर में करने से सभों का प्रथम अन्तर बन गया और अन्त में य के ·४६० मान में जो लागा(१ + य) है इसमें प्रथम अन्तर का संस्कार करने से सभों का लघुरिक्थ बन गया है। इन सभों का क्रम पूर्वक न्यास ऊपर के चक्र में लिख दिया है। इस पर से सब अन्तरों को लेकर चलनकलन के ८५-८६ प्रक्रम से यदि गा(१ + य) के न्यूनतम मान का (जो कि २११ प्रक्रम से य के ·४६१६ · · · · मान में सिद्ध होता है) सूक्ष्म लघुरिक्थ ले आवो तो ९· ९४७२३९१७४३९३४० इतना आता है।

२४६। $\int इ^{-य} य^{न-१}$ ताय इस यूलर के दूसरे चल में यदि बड़ी सीमा ∞ के तुल्य न हो किन्तु अ के तुल्य हो तो खण्डचलानयन से

$$\int_0^{अ} इ^{-य} य^{न-१} ताय$$

$$= \frac{अ^{न} इ^{-अ}}{न} \left\{ १ + \frac{अ}{न+१} + \frac{अ^{२}}{(न+१)(न+२)} + \frac{अ^{३}}{(न+१)(न+२)(न+३)} + \cdots \right\}$$

वा, $\int_{अ}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय$

$$= अ^{न-१} इ^{-अ} \left\{ १ + \frac{न-१}{अ} + \frac{(न-१)(न-२)}{अ^{२}} + \frac{(न-१)(न-२)(न-३)}{अ^{३}} + \cdots \right\}$$

यदि अ < १ और न बड़ी भारी संख्या हो तो पहली श्रेढी का और यदि न < १ से और अ बड़ा हो तो दूसरी श्रेढ़ी का आसन्न मान जान सकते हो। १ से न के छोटे होने में दूसरी श्रेढी के सम पद ऋण और विषम पद सब धन होंगे।

अब $\int_0^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय = \int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय + \int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१} = गा(न)$

इस लिये $\int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१} ताय = गा(न) - \int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय$

$$= गा(न) - इ^{-य} य^{न-१} या \cdots \qquad (१)$$

यदि $\int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय = इ^{-य} य^{न-१}$ या ऊपर की दूसरी श्रेढी के मान पर से मान लो तो इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$इ^{-य} य^{न-१} = -(न-१)\, इ^{-य} य^{न-२} या + इ^{-य} य^{न-१} या - इ^{-य} य^{न-१} \acute{या}$$

$इ^{-य} य^{न-१}$ का भाग दे देने से और पक्षान्तरानयन से

$$य\acute{या} = \{ य - (न-१) \} या - य \quad \cdots\cdots \qquad (२)$$

समझो कि $य\acute{या} = (य - अ_{१})\, या - य + क_{१} या^{२}$ यह एक (३) समीकरण है। इसमें यदि $या^{२}$ का भाग दे दो और $\frac{१}{या} = १ + \frac{ग_{१} या_{१}}{य}$

$$-य ग_{१} \frac{य\acute{या}_{१} - या_{१}}{य^{२}} = (य - अ_{१}) \left(१ + ग_{१} \frac{या_{१}}{य} \right) - य \left(१ + ग_{१} \frac{या_{१}}{य} \right)^{२} + क_{१}$$

वा $\quad य\acute{या}_{१} = (य + अ_{१} + १)\, या_{१} - \frac{क_{१} - अ_{१}}{ग_{१}} य + ग_{१} या_{१}^{२}$

कल्पना करो कि $\text{ग}_{१} = \text{क}_{१} - \text{अ}_{१}$, $\text{क}_{२} = \text{ग}_{१}$, $\text{अ}_{२} = -(\text{अ}_{१} + १)$ तो

$\text{य}\,\text{या}'_{१} = (\text{य} - \text{अ}_{२})\text{या}_{१} - \text{य} + \text{क}_{२}\text{या}_{१}^{२}$ यह ठीक पिछले ही समीकरण के ऐसा उत्पन्न हुआ, इसमें फिर $\dfrac{१}{\text{या}_{१}} = १ + \dfrac{\text{ग}_{२}\,\text{या}_{२}}{\text{य}}$ ऐसा मान पूर्ववत् क्रिया करें और $\text{ग}_{२} = \text{क}_{२} - \text{अ}_{२}$, $\text{क}_{३} = \text{ग}_{२}$, $\text{अ}_{३} = -(\text{अ}_{२} + १)$ तो फिर।

$\text{य}\,\text{या}'_{२} = (\text{य} - \text{अ}_{३})\,\text{या}_{२} - \text{य} + \text{क}_{३}\,\text{या}_{२}^{२}$ ऐसा समीकरण बनेगा। यों बार बार क्रिया करने से

$$\text{या} = \frac{१}{१ + \text{ग}_{१}\text{य}^{-१}\text{या}_{१}} = \frac{१}{१ + \text{ग}_{१}\text{य}^{-१}\dfrac{१}{१ + \text{ग}_{२}\text{य}^{-१}\text{या}_{२}}} = \frac{१}{१ + \dfrac{\text{ग}_{१}\text{य}^{-१}}{१ + \text{ग}_{२}\text{य}^{-१}\text{या}_{२}}}$$

$$= \frac{१}{१ + \dfrac{\text{ग}_{१}\text{य}^{-१}}{१ + \dfrac{\text{ग}_{२}\text{य}^{-१}}{१ + \text{ग}_{३}\text{य}^{-१}\text{या}_{३}}}} = \frac{१}{१ + \dfrac{\text{ग}_{१}\text{य}^{-१}}{१ + \dfrac{\text{ग}_{२}\text{य}^{-१}}{१ + \dfrac{\text{ग}_{३}\text{य}^{-१}}{१ + \text{ग}_{४}\text{य}^{-१}\text{या}_{४}}}}}$$

इस रीति से या का मान एक वितत भिन्न रूप में आता है जिसका मान जगह बचाने के लिये लाघव से।

$$\text{या} = \frac{१}{१+}\;\frac{\text{ग}_{१}\text{य}^{-१}}{१+}\;\frac{\text{ग}_{२}\text{य}^{-१}}{१+}\;\frac{\text{ग}_{३}\text{य}^{-१}}{१+\text{इत्या.}}\cdots$$ ऐसा लिखते हैं

अब (३) में यदि $\text{अ}_{१} = \text{न} - १ = \text{न}_{१}$ और $\text{क}_{१} = ०$ तो यह ठीक (२) समीकरण हो जायगा इस लिये अब जो $\text{ग}_{१}$, $\text{ग}_{२}$, इत्यादि पर से या का विततभिन्न के रूप में मान आवेगा इसका उत्थापन (१) में देने से $\int_{०}^{\text{य}} \text{इ}^{-\text{य}}\text{य}^{\text{न}-१}$ इस का मान आ जायगा। यदि अ, क, ग को $\text{अ}_{१}$, $\text{क}_{१}$, $\text{ग}_{१}$ इत्यादि के मान जानने के लिये साँचा मानो तो

$\text{ग}_{१} = \text{क}_{१} - \text{अ}_{१}$, $\text{क}_{२} = \text{ग}_{१}$, $\text{अ}_{२} = -(\text{अ}_{१} + १)$ इन पर से

	१	२	३	४	५	६	७	८	इत्या.
अ	$\text{न}_{१}$	$-(\text{न}_{१}+१)$	$\text{न}_{१}$	$-(\text{न}_{१}+१)$	$\text{न}_{१}$	$-(\text{न}_{१}+१)$	$\text{न}_{१}$	$-(\text{न}_{१}+१)$	इत्या.
क	०	$-\text{न}_{१}$	१	$१-\text{न}_{१}$	२	$२-\text{न}_{१}$	३	$३-\text{न}_{१}$	इत्या.
ग	$-\text{न}_{१}$	१	$१-\text{न}_{१}$	२	$२-\text{न}_{१}$	३	$३-\text{न}_{१}$	४	इत्या.

फिर ग के मान पर से

$$\int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न_1} ताय = इ^{-य} य^{न_1} \cfrac{१}{१ - \cfrac{न_1 य^{-१}}{१ + \cfrac{य^{-१}}{१ + इत्या॰}}}$$

$$= इ^{-य} य^{न_1} \frac{१}{१-}\;\frac{न_1 य^{-१}}{१+}\;\frac{य^{-१}}{१+}\;\frac{(१-न_1)\,य^{-१}}{१+ इत्या॰}$$

इस में यदि य = अ और अ एक बड़ी संख्या हो तो बहुत जल्द आसन्नमान सूक्ष्म आ जायगा फिर $\int_{अ}^{\infty} इ^{-य} य^{न_1} ताय$ इसके मान से (१) समीकरण से $\int_{0}^{अ} इ^{-य} य^{न_1} ताय$ इसका भी आसन्नमान आ जायगा।

अब इतना ही कह कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं कि इस सान्तचलानयन से अनेक चमत्कार प्रकार उत्पन्न होते हैं इसी लिये गणितज्ञ लोग आज तक कुछ न कुछ विचार करते ही चले जाते हैं। इसमें प्रवेश होने के लिये जितना हमने दिखलाया है उतना ही बहुत है।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

सिद्ध करो कि

१। $\int_{0}^{\frac{\pi}{४}} \frac{ज्याषताष}{कोज्या^{२}ष} = \sqrt{२} - १$

२। $\int_{0}^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{य} + \sqrt{(अ+य)}} = \frac{४}{३} अ^{\frac{१}{२}} \sqrt{(\sqrt{२} - १)}$

३। $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ताय}{अ + २कय + गय^{२}} = \frac{\pi}{\sqrt{(अग - क^{२})}}$ यदि अग $>$ क^{२}

४। $\int_{0}^{१} य^{३} (१ - य)^{\frac{५}{२}} ताय = \frac{२^{५}}{३\cdot७\cdot११\cdot१३}$

५। $\int_{0}^{१} य^{४} (१ - य)^{\frac{१}{४}} ताय = \frac{२^{१३}}{५\cdot७\cdot९\cdot१३\cdot१७}$

६। $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२\;-१} य कोज्या^{२न-१} यताय = \frac{\underline{|म-१}}{न(न+१)\cdots(न+म+१)}$

७। $$\int_{0}^{\infty} \frac{य^{न} ताय}{(अ + कय^{२})^{१ + \frac{न}{२}}} = \frac{२\cdot४\cdot६ \cdots (२न - १)}{३\cdot५\cdot७ \cdots न} \frac{१}{\sqrt{(अक^{१+न})}}$$

८। $$\int_{0}^{१} \left\{ ला \frac{१}{य} \right\}^{न} ताय = |\underline{न}$$

९। $$\int_{0}^{अ} \frac{ताय}{(अ^{न} - य^{न})^{\frac{१}{न}}} = \frac{\pi}{न \; ज्या \frac{\pi}{न}}$$

१०। $$\int_{0}^{\infty} \frac{ताय}{(य^{२} + अ^{२})(य^{२} + क^{२})} = \frac{\pi}{२अक(अ + क)}$$

११। $$\int_{0}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^{४}} = \frac{\pi}{४}$$

१२। $$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} स्प^{न} ष \; ताष = \frac{\pi}{२कोज्या \frac{न\pi}{२}} \quad यदि \; न < १$$

१३। $$\int_{0}^{१} \frac{य^{म} + य^{-म}}{य^{न} + य^{-न}} \frac{ताय}{य} = \frac{\pi}{२नकोज्या \frac{म\pi}{२न}} \; यदि \; न > म$$

१४। $$\int_{0}^{\infty} \frac{(इ^{अय} + इ^{-अय})(इ^{कय} + इ^{-कय})}{इ^{\pi य} + इ^{-\pi य}} ताय = \frac{कोज्या \frac{अ}{२} कोज्या \frac{क}{२}}{कोज्याअ + कोज्याक}$$

यदि $अ + क < \pi$

१५। $$\int_{0}^{\infty} \frac{(इ^{अय} + इ^{-अय})(इ^{कय} + इ^{-कय})}{इ^{\pi य} + इ^{-\pi य}} ताय = \frac{ज्याक}{कोज्याअ + कोज्याक}$$

यदि $अ + क < \pi$

१६। $$\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{कय} + इ^{-कय}}{इ^{\pi य} + इ^{-\pi य}} कोज्याअय \; ताय = \frac{(इ^{\frac{अ}{२}} + इ^{-\frac{अ}{२}}) कोज्या \frac{क}{२}}{इ^{अ} + २कोज्याक + इ^{-अ}}$$

यदि $क < \pi$

१७। $$\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{कय} - इ^{-कय}}{इ^{\pi य} - इ^{-\pi य}} कोज्याअयताय = \frac{ज्याक}{इ^{अ} + २कोज्याक + इ^{-अ}}$$

यदि $क < \pi$

१८। $$\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{कय} + इ^{-कय}}{इ^{\pi य} - इ^{-\pi य}} ज्याअयताय = \frac{१}{२} \frac{इ^{अ} - इ^{-अ}}{इ^{अ} + २कोज्याक + इ^{-अ}}$$

१९। $\int_0^1 \frac{य^अ - य^{-अ}}{१ - य}$ ताय $= \pi$ कोस्पअ$\pi - \frac{१}{अ}$, यदि अ $<$ १

२०। $\int_0^\pi \frac{ला(१ + ज्याअ\ कोज्याय)}{कोज्याय}$ इसका मान क्या होगा

उ० πअ (अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२१। $\int_0^\infty \frac{इ^{-अय} कोज्यामय}{य}$ ताय इसका मान वताओ उ० स्प$^{-१}$ $\left(\frac{म}{अ}\right)$

२२। $\int_0^\infty \frac{ला(१ + अ^२य^२)}{१ + क^२य^२}$ ताय इसका क्या मान होगा।

उ० $\frac{\pi}{क}$ ला$\left(\frac{अ + क}{क}\right)$

(अ के वश से तात्कालिक सम्वन्ध निकालो)

२३। $\int_0^\infty \frac{इ^{अय} + इ^{-अय}}{इ^{\pi य} - इ^{-\pi य}}$ य ताय $= \frac{१}{४}$ छे^{२} $\frac{अ}{२}$

सिद्ध करो कि

२४। $\int_0^1 \frac{यअ-१ + य^{-अ}}{१ + य} \frac{ताय}{य} =$ ला (स्प$\frac{अ\pi}{२}$)

२५। $\int_0^{\frac{\pi}{२}}$ ला (१ + कोज्याअ कोज्याय) $\frac{ताय}{कोज्याय} = \frac{१}{२}\left(\frac{\pi^२}{४} - अ^२\right)$

२६। $\int_0^\infty \frac{य^अ लाय ताय}{१ + य^२} = \frac{\pi^२}{४} \frac{ज्या\frac{अ\pi}{२}}{कोज्या^२\frac{अ\pi}{२}}$

२७। $\int_0^\infty \frac{(य^२ + अ^२)\sqrt{इ}}{य^४ + क^२य^२ + क^४}$ ताय $= \frac{\pi}{२} \frac{अ^२ + क^२}{क^३}$

२८। $\int_0^1$ नय$^{२न-१}$इ$^{य^न}$ताय $=$ १

२९। $\int_0^{\frac{\pi}{२}}$ २कोज्या (अस्पय) ताय $= \pi$इ$^{-अ}$

३०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{छे^४ यताय}{(अ^२ + क^२स्प^२य)^२} = \frac{\pi}{४}\left[\frac{१}{अक^३} + \frac{१}{अ^३क}\right]$

३१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(२स्पष)}\,ताष$

$$= \frac{\pi}{२} + ला\,\{\sqrt{२} - १\}\text{, मान लो कि स्पष = य}^२$$

३२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(कोस्पष)}\,ताष = \frac{१}{\sqrt{२}}\left[\frac{\pi}{२} + ला\,\{\sqrt{२}+१\}\right]$

३३। सिद्ध करो कि कय $इ^{-अ^२य^२}\int_0^{य} इ^{अ^२य^२}\,ताय = \frac{क}{२अ^२}$, यदि $य = \infty$

३४। यदि फ $(य, \frac{१}{य}) = फ(\frac{१}{य}, य)$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty}\frac{ताय}{यफ(य, \frac{१}{य})} = २\int_1^{\infty}\frac{ताय}{यफ(य, \frac{१}{य})}$$

३५। सिद्ध करो कि $\int_0^{२\pi} इ^{कोज्याष}कोज्याष(ज्याताष)ष = २\pi$

(डेमाइवर के सिद्धान्त से कोज्याष, कोज्या२ष, इत्यादि के रूप में इसके मान तुल्य एक श्रेढी बना कर चलानयन करो)

३६। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न}षताष = \frac{\sqrt{\pi}}{२}\,\frac{गा(\frac{न+१}{२})}{गा(\frac{न+२}{२})}$

३७। सिद्ध करो कि $गा(\frac{न}{२})गा(\frac{न+१}{२}) = \frac{\sqrt{\pi}}{२^{न-१}}\,गा(न)$

३८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}}\frac{ज्या^{२म-१}षकोज्या^{२न-१}षताष}{(अज्या^{२}ष + ककोज्या^{२}ष)^{म+न}} = \frac{गा(म)गा(न)}{२अ^{म}क^{न}गा(म+न)}$

३९। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} इ^{-अय}कोज्याकय^{म-१}ताय$

$$= \frac{गा(म)}{(अ^२+क^२)^{\frac{म}{२}}}कोज्याम\left\{स्प^{-१}\frac{क}{अ}\right\}$$

और $\int_0^{\infty} इ^{-अय}ज्याकय\,य^{म-१}ताय = \frac{गा(म)}{(अ^२+क^२)^{\frac{म}{२}}}ज्याम\left\{स्प^{-१}\frac{क}{अ}\right\}$

$\int_0^{\infty} इ^{-अ'य}य^{म-१}ताय = \frac{गा(म)}{अ'^{म}}$,

इसमें $अ' = अ - क\sqrt{-१}$ मान सम्भाव्य, असम्भाव्य को बराबर करो)

४०। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ज्याय}}{\text{य}} = \int_0^\infty \frac{\text{ज्या}^2\text{य}}{\text{य}^2}$

४१। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{कोज्याकय}\, \text{य}^{\text{न}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा(न)}}{\text{क}^\text{न}}\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}$

$$\int_0^\infty \text{ज्याकय}\, \text{य}^{\text{न}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा(न)}}{\text{क}^\text{न}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{न}\pi}{२}$$

४२। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{कोज्याकलताल}}{\text{ल}^\text{न}}$

$$= \frac{१}{\text{गा(न)}}\int_0^\infty \frac{\text{य}^\text{न}\text{ताय}}{\text{क}^२+\text{य}^२} = \frac{\text{क}^{\text{न}-१}}{\text{गा(न)}}\frac{\pi}{२\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{ज्याकलताल}}{\text{ल}^\text{न}} = \frac{\text{क}^{\text{न}-१}}{\text{गा(न)}}\ \frac{\pi}{२\text{ज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$$

४३। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{र}^२}\text{र}^{-२}\text{तार} = -\sqrt{\pi}$

४४। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \left(\text{इ}^{-\frac{\text{अ}^२}{\text{य}^२}} - \text{इ}^{-\frac{\text{क}^२}{\text{य}^२}}\right)\text{ताय} = (\text{क}-\text{अ})\sqrt{\pi}$

४५। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ला}(१-२\text{नकोज्याकय}+\text{न}^२)\text{ताय}}{\text{य}} = ०$

यदि न < १

४६। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{ला}\,\frac{१+२\text{नकोज्याअय}+\text{न}^२}{१+२\text{नकोज्याकय}+\text{न}^२}\frac{\text{ताय}}{\text{य}}$ यह क्रम से

$२\,\text{ला}(१+\text{न})\text{ला}\frac{\text{क}}{\text{अ}}$, $२\text{ला}(१+\frac{१}{\text{न}})\ \text{ला}\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ इस के तुल्य होगा

यदि न < १, न > १

(फ्रुलानी का सिद्धान्त देखो)

४७। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२}\ \text{ला}(\text{य}+\frac{१}{\text{य}}) = \pi\ \text{ला}(२)$

(य = स्पष ऐसा मान कर आगे क्रिया करो)

४८। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \left[\frac{\text{इ}^{-\text{अय}}-\text{इ}^{-\text{कय}}}{\text{य}}\right]^२\text{ताय} = \text{ला}\frac{(२\text{अ})^{२\text{अ}}(२\text{क})^{२\text{क}}}{(\text{अ}+\text{क})^{२(\text{अ}+\text{क})}}$

४९। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{१} \frac{य^{म} - य^{न}}{लाय} \frac{ताय}{य} = ला\, \frac{म}{न}$

(लाय = र मान दूसरा रूप बना कर फ़ुलानी का सिद्धान्त लगावो) वा द्विगुण चलानयन $\int_{न}^{म} \int_{0}^{१} य^{अ-१} ताय\; ताअ$ इसका करो)

५०। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\frac{\pi}{४}} \{ \sqrt{(स्पष)} + \sqrt{(कोस्पष)} \}\, ताष = \frac{\pi}{२\sqrt{२}}$

५१। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{स्प^{न}ष}{अकोज्या^{२}ष + कज्या^{२}ष}$

$$= \frac{\pi}{२ कोज्या \frac{१}{२} न\pi} \; \frac{१}{अ^{\frac{१-न}{२}}\, क^{\frac{१+न}{२}}}$$

यदि न < १

५२। सिद्ध करो कि $ला \int \left\{ \frac{इ^{य}+१}{इ^{य}-१} \right\} ताय = \frac{\pi^{२}}{४}$,

($इ^{य}$ का अंश हर में भाग देकर लघुरिक्थ की श्रेढी से क्रिया करो)

५३। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{य}\; लाय}{(१+य)^{२}} ताय = \pi$

५४। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{१} \frac{य^{द-१} (१-य)^{म-१}}{(क+गय)^{द-म}}$ ताय

$$= \frac{गा(द) गा(म)}{गा(द+म)} \; \frac{१}{क^{म} (क+ग)^{द}}$$

५५। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\pi} \frac{ज्या^{न-१}ष\; ताष}{(अ_{१} + क_{१} कोज्याष)^{न}}$

$$= \frac{\{ गा(\frac{न}{२}) \}^{२}}{गा\,(न)} \; \frac{२^{न-१}}{(अ_{१}^{२} - क_{१}^{२})^{\frac{न}{२}}}$$

५६। सिद्ध करो कि $न \int_{0}^{१} \frac{य^{म-१} ताय}{(१-य^{न})^{\frac{म}{न}}} = \frac{\pi}{ज्या \frac{म\pi}{न}}$

५७। सिद्ध करो कि

$$(१-ग)^{\frac{म}{न}} \int_{0}^{१} \frac{य^{\frac{म}{न}-१} ताय}{(१+गय)(१-य)^{\frac{म}{न}}} = न \int_{0}^{१} \frac{य^{म-१} ताय}{(१-य^{न})^{\frac{म}{न}}}$$

५८। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ज्या अय ज्या}^{२}\text{गय}}{\text{य}}$ ताय इस का मान अ, और π के वश से ० वा $\pm \frac{\pi}{४}$ अथवा $\pm \frac{\pi}{२}$ होगा।

५९। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-(\text{य}^{२}+\frac{\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}})\text{क}} \text{ताय} = \sqrt{\frac{१}{\text{क}}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{२}\text{इ}^{-\text{२अक}}$

६०। सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-(\text{य}^{२}+\frac{\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}})\text{कोज्याष}} \text{कोज्या} \left\{ (\text{य}^{२}+\frac{\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}})\,\text{ज्याष} \right\} \text{ताय}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{२}\,\text{इ}^{-\text{२अकोज्याष}}\,\text{कोज्या} \left\{ \text{२अज्याष} + \frac{\text{ष}}{२} \right\}$$

और $\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-(\text{य}^{२}+\frac{\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}})\text{कोज्याष}} \text{ज्या} \left\{ (\text{य}^{२}+\frac{\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}})\,\text{ज्याष} \right\} \text{ताय}$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{२}\,\text{इ}^{-\text{२अकोज्याष}}\,\text{ज्या} \left(\text{२अज्याष} + \frac{\text{ष}}{२} \right)$$

(५९वें प्रश्न में क के स्थान में कोज्याष + ज्याष$\sqrt{-१}$ का उत्थापन दे कर सम्भाव्य और असम्भाव्य को अलग अलग बराबर करो)

६१। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{(१-\text{य}^{२})\ \text{कोज्या गय ताय}}{१+\text{य}^{२}} = \pi\text{इ}^{-\text{ग}}$

६२। सिद्ध करो कि $१ - \frac{\text{य}^{२}}{२^{२}} + \frac{\text{य}^{४}}{२^{२}.४^{२}} - \frac{\text{य}^{६}}{२^{२}.४^{२}.६^{२}} + \cdots$

$$= \frac{२}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{कोज्या}\,(\text{यज्यार})\ \text{तार}$$

६३। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्यायज्या}^{-१}(\text{ज्याय ज्यार})\ \text{ताय तार} = \frac{\pi}{२}(\frac{\pi}{२}-१$

६४। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \text{कोज्या}\,(\text{कय}^{\frac{१}{\text{न}}})\ \text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{न}+१)\ \text{कोज्या}\,(\frac{\text{न}^{\text{ग}}}{२})}{\text{क}^{\text{न}}}$

६५। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{१} \frac{\text{लाय ताय}}{१+\text{य}} = -\frac{\pi^{२}}{८}$

६६। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{१} \frac{\text{ताय}\,(\text{लाय})^{\text{२न}\ १}}{१-\text{य}}$

$$= -\lfloor २न-१ \left[१ + \frac{१}{२^{२न}} + \frac{१}{३^{२न}} + \cdots \right.$$

६७। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{अ}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}\sqrt{(अ^२-य^२)}}$

$= \frac{२}{३अ}$ दै$_१$(ग, $\frac{\pi}{२}$), जहाँ ग = $\frac{१}{३}$

{ ३४ प्रक्रम का (३) और ३७ प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो }

६८। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण श्रु = गज्याष कोज्याप यह है उसमें प = ० और ष = $\frac{\pi}{२}$ के बीच में श्रुति का मध्यम मान निकालो। उ० $\frac{ग}{\pi}$

६९। सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{\infty} इ^{-य^२} ताय = \frac{इ^{-अ^२}}{२अ} \frac{१}{१+} \frac{क}{१+} \frac{२क}{१+} \frac{३क}{१+} + \frac{४क}{१+\cdots} \text{ जहाँ } क = \frac{१}{२अ^२}$$

७०। सिद्ध करो

$$इ^य \int_य^{\infty} इ^{-य} लायताय = लाय + \frac{य^{-१}}{१+} \frac{य^{-१}}{१+} \frac{२य^{-१}}{१+} \frac{२य^{-१}}{१+} \frac{३य^{-१}}{१+} \frac{३य^{-१}}{१+} \cdots$$

७१। पचीस अंगुल आधार पर जो वर्गाकार एक रूमाल थी उसके बीच में एक किनारे से दूसरे किनारे तक एक लड़के ने एक टेढ़ी लाल रोशनाई से धारी कर दी। धारी के प्रतिविन्दु से सामने के भुज पर लम्ब डाला तो लम्ब का मान $६\sqrt{य}$ ठहरा तो लम्बों के मध्यम मान तुल्य लम्ब में य का क्या मान होगा। एक कोने से लम्ब मूल का अन्तर य है। उ० य = ११$\frac{१}{९}$ अंगुल

इति नवमाध्याय।



अथ दशमाध्याय ।

मिश्रित प्रकीर्णक ।

२४७। ६३ वें प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हो चुका है कि यदि सीमा स्थिराङ्क हों तो $\int_{अ}^{क} \int_{ग}^{} $ फ(य,र) तारताय = $\int_{ग}^{घ} \int_{अ}^{क}$ फ(य,र) तायतार

परन्तु यदि इन सीमाओं में से कोई दो चल हों जैसा कि ६४ वें प्रक्रम में दिखलाया है तब कैसे क्रम को बदल कर चलानयन करना इसके लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_{0}^{अ} \int_{0}^{\sqrt{(अ^2 - य^2)}}$ फ (य,र) तार ताय इसमें क्रम को बदलने की इच्छा है । अर्थात् जहाँ पहले र के वश से चलानयन किया गया है वहाँ पहले य के वश से किया चाहते हैं ।

यहाँ यदि विचारो तो र की सीमा ० और $\sqrt{(अ^2 - य^2)}$ है इसलिये कह सकते हो कि जिस वृत्त का केन्द्र मूल स्थान और व्यासार्द्ध अ है उसके परिधि-चतुर्थांश के प्रतिविन्दु तक र के मान में पहले चल निकाला गया है फिर र अक्ष और वृत्त के योग विन्दु से लेकर य के अ तुल्य मान में चल का मान लाया गया है । इसलिये यदि ल = फ(य,र) यह एक घनपृष्ठ का समीकरण कल्पना करें तो ऊपर का द्विगुण चल १७४ वें प्रक्रम से एक घनक्षेत्र के उस खण्ड के घनफल के समान है जो इस वृत्त पाद के प्रतिविन्दु से लम्ब खड़ा करने से लम्बाग्रों के भीतर है । इसलिये यदि अब क्रम बदलना चाहें तो वृत्तपाद के भीतर पहले य की सीमा ० और $\sqrt{(अ^2 - र^2)}$ होगी फिर र की सीमा ० और अ होगी इसलिये ।

$\int_{0}^{अ} \int_{0}^{\sqrt{(अ^2 - य^2)}}$ फ(य,र) तारताय = $\int_{0}^{अ} \int_{0}^{\sqrt{(अ^2 - र^2)}}$ फ (य,र) तायतार

ऐसा होगा ।

क्रम बदलने से क्या अभिप्राय है इसके समझने के लिये केवल ऊपर उदाहरण दिखलाया गया है इसके लिये कोई विधि नहीं है उदाहरण के वश बुद्धिमानों को चाहिये कि क्रम बदलने में सीमाओं का ज्ञान करें ।

२४८। ऊपर के विषय का एक और उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_{०}^{अ}\int_{०}^{य}\int_{०}^{र}$ फ(य,र,ल) ताल तार ताय इसमें क्रम को बदलना है।

यहाँ सीमाओं के देखने से बोध होता है कि एक सूची के सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जिसके सीमाओं के धरातल का क्रम से ल = ०, ल = र, र = य, य = अ, ये समीकरण हैं।

इसलिये क्रम बदलने से

$$\int_{०}^{अ}\int_{र}^{अ}\int_{०}^{र} फ(य,र,ल)तालतायतार$$

$$\int_{०}^{अ}\int_{०}^{र}\int_{र}^{अ} फ(य,र,ल)तायतालतार$$

$$\int_{०}^{अ}\int_{ल}^{अ}\int_{र}^{अ} फ(य,र,ल)तायतारताल$$

$$\int_{०}^{अ}\int_{०}^{य}\int_{ल}^{य} फ(य,र,ल)तारतालताय$$

$$\int_{०}^{अ}\int_{ल}^{अ}\int_{ल}^{य} फ(य,र,ल)तारतायताल$$

ये पाँच भेद होंगे। इन पाँचों से वही चल आवेगा जो कि दिये हुए फल का चल होगा। यदि फ(य,र,ल) के स्थान में १ रख लो तो छओ पर से $\frac{अ^{३}}{६}$ यही मान प्रतीति के योग्य आ जायगा।

२४९। $\int\int$ शातारताय इसको व और श के रूप में बदल देना है जहाँ शा, य और र का फल है और

फ₁ (य,र,व,श) = ०, फ₂(य,र,व,श) = ०, ... (१)

यहाँ पर इतना समझ लेना चाहिये कि $\int\int$ शातारताय इसमें र के ज्ञात सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जो सीमायें कि य के फल हैं और य की सीमायें भी ज्ञात हैं और यह भी जानते हैं कि स्थिर हैं।

(१) इसके दोनों समीकरणों पर से व की उन्मिति जान उनके साम्य से स्पष्ट है कि र = फा(य,श) (२) ऐसा होगा।

इस पर से तार = फा'(य,श) ताश जहाँ फा(य,श) य को स्थिर मान श के वश से फा'(य,श) का तात्कालिक सम्बन्ध है।

र, और तार का यह जो मान आया है उसका उत्थापन $\int$ शातार में देने से $\int$ शा$_1$ फा$'$ (य,श) ताश ऐसा होगा जहाँ शा$_1$ यह शा के मान में र का उत्थापन देने से शा का रूपान्तर है। इसलिये पहले द्विगुणचलानयन का रूप $\int\int$ शा$_1$ फा$'$(य,श)ताशताय ऐसा होगा जहाँ र के ज्ञात सीमाओं पर से श की भी उचित सीमा (२) समीकरण से विदित हो जायँगी।

आगे अब समझो कि उदाहरण के रूप के वश से जैसा कि २४७–४८ प्रक्रमों में दिखा आये हैं $\int\int$ शा$_1$ फा$'$ (य,श) ताश ताय इसमें उचित सीमाओं के भीतर क्रम को बदल कर $\int\int$ शा$_1$ फा$'$ (य,श) ताय ताश इसका मान जान लिया अब चाहते हैं कि य और ताय को उड़ा दें और उसके स्थान में व और ताव आ जायँ।

(१) के समीकरणों पर से र की दो उन्मिति जान कर उनके साम्य से य का मान ले आवो तो स्पष्ट है कि य = फि(श,व) · · · · (३) होगा फिर इस पर से ताय = फि$'$ (श,व) ताव, जहाँ फि(श,व) व के वश से फि(श,व) का तात्कालिक सम्बन्ध है।

द्विगुणचल का जो $\int\int$ शा$_1$ फा$'$(य,श) तायताश यह रूपान्तर है इसमें य, और ताय के मान का उत्थापन देने से

$\int\int$ शा$'$ फा$'$(य,श) फि$'$(श,व) ताव ताश जहाँ शा$_1$ के मान में य के मान का उत्थापन देने से शा$'$ आया है और फा$'$(य,श) के मान में य के स्थान में फि(श,व) का उत्थापन दे देना है।

यहाँ य की जानी हुई सीमाओं पर से (३) समीकरण के बल से श के रूप में व की सीमा विदित हो जायगी।

(१) से और चलनकलन के

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताव}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}=0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\frac{\text{ताव}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}=0,$$

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} \text{ की उन्मिति से } \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}}=\frac{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताश}} = \text{फं}'(\text{य},\text{श}) = \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$

तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर र और व के स्थान में उनका मान जो य और श के रूप में आया है रख देना चाहिये।

इसी तरह (१) से

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} = 0,$$

इस पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}$ की उन्मिति जान कर

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} = \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} = \text{फिं}'(\text{श},\text{व})$$

इस लिये फं' (य,श) फिं' (श,व)

$$= \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}}$$

इन सबका उत्थापन देने से।

$$\int\int \text{शातारताय} = \int\int \text{शा} \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} \text{तावताश} \quad (४)$$

यहाँ भी तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर य और र के मान का उत्थापन दे देना चाहिये जो कि व और श के रूप में आये हैं और शा के मान में भी य, र के इन्हीं मानों का उत्थापन दे दो।

यदि (१) समीकरण का रूप

$\text{फ}_1(\text{य},\text{र},\text{व},\text{श}) = \text{य} - \text{फी}_1(\text{व},\text{श}) = 0, \text{र} - \text{फी}_2(\text{व},\text{श}) = 0, = \text{फ}_2(\text{य},\text{र},\text{व},\text{श}) \cdots$ (५)
ऐसा हो तो

$\frac{ताफ_1}{ताय} = १, \frac{ताफ_1}{तार} = ०, \frac{ताफ_2}{ताय} = ०, \frac{ताफ_2}{तार} = १,$

इस का उत्थापन (४) में देने से

$$\int\int शा\ तारताय = \int\int शा \left(\frac{ताफी_1}{ताव}\frac{ताफी_2}{ताश} - \frac{ताफी_1}{ताश}\frac{ताफी_2}{ताव}\right) तावताश$$

यहाँ (५) वें से य, और र के मान व और श के रूप में जो निकलेंगे उनका उत्थापन शा में दे देना चाहिये।

यदि (५) वें से य, और र के रूप में फी$_1$(व,श) और फी$_2$(व,श) का मान जानकर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो ऊपर का समीकरण नीचे लिखे समीकरण के समान होगा।

$$\int\int शा\ तारताय = \int\int शा' \left(\frac{ताय}{ताव}\frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश}\frac{तार}{ताव}\right) ताशताव \cdots (६)$$

यदि (१) समीकरण का रूप नीचे लिखे के ऐसा हो

$$व - फु_1(य,र) = ०,\ \ श - फु_2(य,र) = ० \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (७)$$

तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\int\int शा\ तारताय \int\int \frac{शा\ ताव\ ताश}{\frac{ताफु_1}{ताय}\frac{ताफु_2}{तार} - \frac{ताफु_2}{ताय}\frac{ताफु_1}{तार}} = \int\int \frac{शा\ ताव\ ताश}{\frac{ताव}{ताय}\frac{ताश}{तार} - \frac{ताव}{तार}\frac{ताश}{ताय}} (८)$$

नये चलों के यदि सीमा प्रसिद्ध हो जायँ तो (४), (६), और (८) वें से नये चल राशि के वश से द्विगुण चल का मान सहज में सिद्ध हो जायगा परन्तु $\int$ शा$_1$फा (य,श) ताश ताय पर से क्रम बदलने में जहाँ कठिनता आ पड़ेगी वहाँ पर ये सब बेकाम पड़ जायँगे।

२५०। ऊपर के प्रक्रम की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\int_0^{ग}\int_0^{ग-य}$ शा तार ताय इसको व,श के वश से बदल देने की इच्छा है जहाँ य + र = व, र = वश।

ऊपर के प्रक्रम में जैसा लिखा है वैसी सब क्रिया करने से

$र = \frac{शय}{१-श}$ और $\frac{तार}{ताश} = \frac{य}{(१-श)^2}$ ।

जब र = ० तब श = ० और जब र = ग − य तब श = $\frac{ग - य}{ग}$ इस लिये पहले र को बदलने से

$$\int_0^{ग} \int_0^{\frac{ग-य}{ग}} शा_{१} य(१ - श)^{-२}\ ताश\ ताय$$ ऐसा हुआ।

इस द्विगुणचल का २४७ प्रक्रम के ऐसा यदि स्वरूप विचारो तो ग व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनेगा उसके एक व्यास रेखा को य अक्ष मान और उसके एक अग्र से भुज गणना करें तो श का मान, उस कोण की कोटिज्या होगी जो वृत्त के कोट्यग्र पर केन्द्र से गई रेखा और य अक्ष से उत्पन्न होता है। इसलिये एक वृत्तपाद के भीतर श का मान ० और १ के भीतर होगा और य की सीमा ० और ग (१ − श) के भीतर होगी इसलिये यदि ऊपर के द्विगुण चल में क्रम को बदलें तो

$$\int_0^{१} \int_0^{ग(१-श)} शा_{१} य(\ १ - श\ )^{-२} ताय\ ताश$$ ऐसा होगा।

अब इसमें दिये हुए समीकरण से

य = व(१−श) और $\frac{ताय}{ताव}$ = १ − श और जब य = ० तब व = ० और जब य = ग(१ − श) तब व = ग इसलिये ऊपर के द्विगुण चल का रूप

$$\int_0^{१} \int_0^{ग} \int शा\ व\ ताव\ ताश$$ ऐसा हुआ।

(२) $\int\int$ श तार ताय इसको श्रु, और प के साथ बदल देना है जहाँ य = श्रुकोज्याप, र = श्रुज्याप।

यहाँ मान लो कि श = प और व = श्रु है तो २४९ प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$\frac{ताय}{ताव}\frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश}\ \frac{तार}{ताव} = श्रुकोज्या^{२}प + श्रुज्या^{२}प = श्रु$$

इसलिये ऊपर के द्विगुण चल का रूप $\int\int$ शा श्रुताश्रुताप ऐसा हुआ। इसे यदि विचारो तो १७८ वें प्रक्रम में जो घनफल जानने के लिये अक्षीय समीकरण पर से प्रकार लिखा है उसी के समान है। सीमाओं का विचार अवश्य यहाँ पर कर लेना चाहिये जिसमें य और र के वश से जो अवयव आये हों वेही अवयव व और श के वश से भी आ जायँ।

इसी में यदि शा = फ(अय + कर) तो ऊपर की युक्ति से बदलने पर द्विगुण चल का रूप

$$\int\int \text{फ} \{ \text{ज श्रु कोज्या}(\text{ष} - \text{अ}_1) \} \text{ श्रु ताश्रुताप}$$ ऐसा होगा,

जहाँ ज कोज्याअ$_1$ = अ और जज्याअ$_1$ = क। इसमें यदि ष − अ$_1$ = ष$'$ तो द्विगुण चल का रूप

$$\int\int \text{फ}(\text{ज श्रु कोज्या ष}')\text{श्रुताश्रु ताष}'$$, फिर इसमें मान लो कि

श्रुकोज्याष$'$ = य$'$ और श्रुज्याष$'$ = र$'$ तो इसका रूपान्तर

$$\int\int \text{फ}(\text{ज य}') \text{ तार}' \text{ ताय}'$$ ऐसा होगा।

(एक एक को स्थिर मान कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो जैसा कि २४९ वें प्रक्रम में कहा है)

स्वर चिह्न को उड़ा देने से

$$\int\int \text{फ (अय + कर)तार ताय} = \int\int \text{फ(जय)तार ताय}$$

जहाँ ज^2 = $\sqrt{}$(अ^2 + क^2) और बायें पक्ष की सीमाओं पर से उदाहरण के स्वरूप से दहने पक्ष में सीमाओं का ज्ञान प्रायः हो सकता है।

(२) १५२ वें प्रक्रम से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल सिद्ध है कि द्विगुण चल के रूप में $\int\int\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}}$ तार ताय ऐसा होगा इसे ताष, ताष$_1$ के वश से बदलना है जहाँ

ल = श्रुकोज्याष, य = श्रुज्याषकोज्याष$_1$, र = श्रुज्याषज्याष$_1$

पृष्ठ के समीकरण से ल, य और र के रूप में आजायगा इसलिये ल के स्थान में य, र का फल रख देने से स्पष्ट है कि ष, ष$_1$ का कोई फल श्रु होगा इसलिये पहले तार ताय बदलने के लिये २४९ वें प्रक्रम की युक्ति से पहले ष$_1$ को फिर ष को स्थिर मान लेने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ज्याष कोज्याष}_1 + \text{श्रुकोज्याषकोज्याष}_1$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} \text{ज्याष कोज्याष}_1 - \text{श्रुज्याष ज्याष}_1$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ज्याष ज्याष}_1 + \text{श्रुकोज्याष ज्याष}_1$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\text{ज्याप ज्याष}_1 + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_1$$

इस लिये $\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \text{श्रुज्याप}\left(\text{श्रु कोज्याष} + \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\text{ज्याष}\right)$

इसलिये तार ताय को हटा कर उसके स्थान में

$$\text{श्रुज्याप}\left(\text{श्रु कोज्याष} + \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\text{ज्याष}\right) \text{ इसे रख दो ।}$$

अब $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}$ इसके बदलने के लिये एक एक को स्थिर मानने से चलनकलन के ६६ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}_1} + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1}$$

और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\text{कोज्याष} - \text{श्रुज्याष}$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1}\text{कोज्याष}$$

अब इन पर से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ का मान ले आवो तो एक भिन्न होगा जिसका अंश

$$= \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} - \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}$$

$$= \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\text{कोज्याष} - \text{श्रु ज्याष}\right]\left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1}\text{ज्याप ज्याष}_1 + \text{श्रुज्याप कोज्याष}_1\right] - \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$$

$$= -\text{श्रुज्याष}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} + \text{श्रुज्याषकोज्याषकोज्याष}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{षकोज्याष}_1$$

और हर= $\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$ जिसका मान अभी ऊपर ले आये हैं। इस तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{श्रुज्याषकोज्याषकोज्याष}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} - \text{श्रुज्याष}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} - \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{षकोज्याष}_1}{\text{श्रुज्याष}\left(\text{श्रुकोज्याष} + \text{ज्याष}\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\right)}$$

इसी तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{श्रुकोज्याष}_1 \dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} + \text{श्रज्याष कोज्याप ज्याष}_1 \dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} - \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{षज्याष}}{\text{श्रुज्याष} \left(\text{श्रुकोज्याष} + \text{ज्याप} \dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right)}$$

इसलिये $\quad १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2$

$$= \frac{\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष} + \text{श्रु}^2 \left(\dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} \right)^2 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष} \left(\dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)^2}{\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष} \left(\text{श्रुकोज्याप} + \text{ज्याप} \dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right)^2}$$

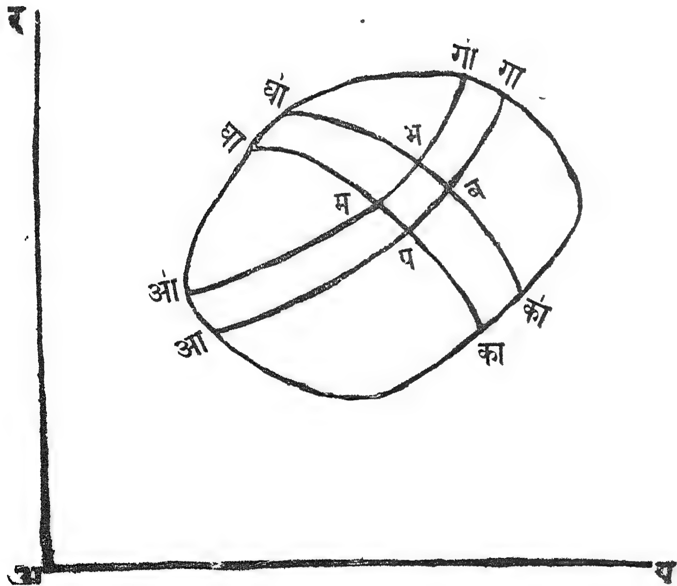
इस लिये वदले हुए द्विगुणचल का रूप

$$\int\int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} + \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} \right)^2 + \text{ज्या}^2\text{ष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)^2 \right\}} \text{श्रुताप ताष}_1$$

ऐसा हुआ।

यही १५५ वें प्रक्रम में भी लिख आये हैं।

२५१। इस प्रकार से द्विगुणचल का जो परिवर्त्तन किया है उसे क्षेत्ररीति से भी दिखा सकते हैं।



कल्पना करो कि $\int\int$ शा तार ताय यह एक द्विगुण चल है जिसका मान आकागाघा सीमा के भीतर जितने य, और र हैं उन सबके वश से निकाला गया

है। मानो कि $य = फ_1 (व, श), र = फ_2 (व, श) \cdots (१)$ जहाँ व और श नये चल हैं।

(१) से कल्पना करो कि

$$व = फा_1(य,र), \qquad श = फा_2(य,र) \qquad \cdots\cdots \qquad (२)$$

अब इसके पहले समीकरण में यदि व के स्थान में कोई स्थिराङ्क रख दें तो कह सकते हैं कि यह एक कोई वक्र का समीकरण होगा इसलिये नये नये स्थिराङ्कों के रखने से इस समीकरण से एक वक्रों की श्रेढी उत्पन्न होगी। मान लो कि व के स्थान में एक स्थिराङ्क को रख देने से आ प व गा वक्र का समीकरण उत्पन्न हुआ। आ प व गा यह ऐसा वक्र हुआ जिसके प्रतिविन्दु पर $फा_1(य,र)$ यह एक स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इसी प्रकार से समझो कि व के स्थान में व + △ व के रख देने से दूसरा आ' म भ गा' वक्र हुआ। इसी तरह से (१) में दूसरे समीकरण से समझो कि श से एक वक्र का प म घा और श के स्थान में श + △श के रख देने से दूसरा का' व भ घा' वक्र हुआ। अब मानो कि प विन्दु का भु = य, और कोटि र है जिनके वश से व भ म विन्दुओं के भुज कोटि को जानना है।

वक्र के समीकरण से स्पष्ट है कि श के स्थान में श + △ श के रख देने से व विन्दु के भुज कोटि होंगे। इसलिये यदि △ श का मान बहुत ही छोटा मानें तो व के भुज कोटि के मान (१) से क्रम से $य + \frac{ताय}{ताश} △ श$, और $र + \frac{तार}{ताश} △ श$ होंगे।

इसी तरह व के स्थान में व + △ व के रख देने से म के भुज कोटि के मान (१) से और △ श को बहुत ही छोटा मानने से $य + \frac{ताय}{ताव}△व$ और $र + \frac{तार}{ताव}△व$ होंगे, व के स्थान में व + △ व और श के स्थान में श + △श को रख देने से भ के भुज कोटि क्रम से $य + \frac{ताय}{ताव} △ व + \frac{ताय}{ताश}△श$ और $र + \frac{तार}{ताव}△व + \frac{तार}{ताश} △ श$ के होंगे, । इन चारो विन्दुओं के भुज कोटि के मानों से स्पष्ट होता है कि ये चारो विन्दु एक समानान्तर चतुर्भुज के कोनों पर क्रम से स्थित हैं जो चतुर्भुज अत्यन्त छोटी दशा में वक्र चापीय चतुर्भुज हो जायगा और उसका फल यदि कोणीय भुज, कोटि के वश से ले आवो तो

$$\pm\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}-\frac{\text{ताय}}{\text{ताश}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}\right)\triangle\text{ श }\triangle\text{ व}$$ यह होगा।

इस लिये $\int\int$ शा तार ताय इसके स्थान में

$$\pm\int\int\text{शा}\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}-\frac{\text{ताय}}{\text{ताश}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}\right)\text{ ताश ताव}$$ ऐसा रख सकते हैं जैसा कि २४९ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में है।

इसमें उदाहरण के स्वरूप के वश से जहाँ पर कि सीमाओं को जानते हैं धन ऋण का संशय निकल जायगा।

यहाँ पर पहले व को स्थिर मान श के वश से जो उचित सीमाओं के भीतर चलानयन किया जायगा वह ऊपर दिखाये हुए अनेक चतुर्भुजों के योग के वश से होगा जिनसे एक आआगागा धारी बन जायगी फिर उचित सीमाओं के भीतर व के वश से जो चलानयन किया जायगा वह सब धारियों के योग के वश से अर्थात् आकागाघा सीमाओं के वश से होगा। इस प्रकार से आकागाघा सीमाओं पर जो अनेक लम्ब खड़े किये जायँगे उनके भीतर जो घनक्षेत्र का अवयव होगा उसका घनफल आ जायगा यदि ऊपर के द्विगुणचल में शा = ल मान लें।

२५२। इसी तरह से $\int\int\int$ शा ताल तार ताय इस त्रिगुणचल को तीन नये चल के वश से बदलना हो जहाँ नये चलों का पुराने से सम्बन्ध

$$\text{य} = \text{फ}_1(\text{व, श, ह}),\ \text{र} = \text{फ}_2(\text{व, श, ह}),\ \text{ल} = \text{फ}_3(\text{व, श, ह}) \cdots\cdots\cdots (1)$$

इस तरह का होय तो पहले ल के स्थान में ह को रखने के लिये समझ रखो कि जब ताल का साधन करते हैं उस समय य और र को स्थिर मान लेते हैं इस लिये (१) के पहले दो समीकरणों से व की उन्मिति से श का मान य, र और ह के फल रूप में आवेगा फिर विलोम उत्थापन से व का मान भी य, र और ह के कोई फल के रूप में आवेगा। इसलिये ल में इनका उत्थापन देने से ल का मान भी य, र और ह का कोई फल होगा। इसलिये इस फल में य और र को स्थिर मान जो ताल का मान आवेगा उसका स्वरूप ताह के वश से सिद्ध हो जायगा इसलिये ताल के स्थान में ताह को रख सकते हैं। अथवा (१) से चलनकलन के ६७ वें प्रक्रम से।

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताह}} = 0 = \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताह}} = 0 = \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताह}}$$

यहाँ $\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}}$ और $\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}}$ के उन्मितियों पर से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताश}}}$$

$$\text{जहां ना} = \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताश}} \right)$$

$$+ \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताव}} \cdot \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताश}} \right)$$

$$+ \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{३}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} \right)$$

इस लिये ऊपर के त्रिगुण चल का रूप

$$\int\int\int \text{शा}_\text{१} \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताश}}} \text{ताह तार ताय ऐसा होगा ।}$$

जहां $\text{शा}_\text{१}$ ल के स्थान में ल का मान जो य, र और ह के फल रूप में आया है उस का उत्थापन दे देने से शा का मान है। और ल के सीमाओं पर से ह सीमायें भी मालूम हो जायंगी ।

अब ऊपर के त्रिगुणचल में मान लो कि दो वार क्रम वदलने से

$$\int\int\int \text{शा}_\text{१} \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताश}}} \text{ तार ताय ताह इस का मान}$$

जान लिया तो २४९ वें प्रक्रम की युक्ति से ऊपर (१) के प्रथम दो समीकरणों से तार ताय के स्थान में

$$\left(\frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_\text{२}}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_\text{१}}{\text{ताश}} \right) \text{ ताव ताश इस को रख सकते हैं।}$$

इस लिये त्रिगुण चल का रूप बदलने से

$$\int\int\int \text{शा ताव ताश ताह होगा ।}$$

जहां य,र और ल के मान जो व,श और ह के फल रूप में आवेंगे उनका शा में उत्थापन देने से शा है।

२५३। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रमों का विशेष बोध होने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

$$(१) \int\int\int\cdots फ(अ_१य_१ + अ_२य_२ + \cdots + अ_नय_न) ताय_न ताय_{न-१} \cdots ताय_१$$

इस अनेक गुणचल को एक गुणचल में बदलना है जहां चलों के प्रतिमानों के वश से (जो कि $य_१^२ + य_२^२ + य_३^२ + \cdots + य_न^२ \angle १$ इस नियम से आवेंगे) चलानयन किया गया है।

यहां २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से अन्त में अनेक गुणचल का रूप

$$\int\int\int\cdots फ(जय_१\cdots) ताय_न\ ताय_{न-१}\cdots ताय_१$$ ऐसा होगा।

जहां $ज = \sqrt{(अ_१^२ + अ_२^२ + अ_३^२ + \cdots + अ_न^२)}$

यहां पर यह जो परिवर्त्तन किया गया है वह सब चलराशियों का वर्गयोग १ से अधिक नहीं है इस नियम को न तोड़ेगा अर्थात् इस में भी सब की वही सीमा रहेंगी जो कि पहले में थीं।

इस लिये $य_१$ को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने में और $य_२^२ + य_३^२ + \cdots + य_न^२ \angle १ - य_१^२$ मान लेने से २१४ वें प्रक्रम में यदि द, म, न, इत्यादि को १, प, ब, भ इत्यादि को २ और अ, क, ख इत्यादि को $\sqrt{(१ - य_१^२)}$ मान लें तो चलराशियों के सब धन मान में मान

$$\frac{\{गा(\frac{१}{२})\}^{न-१}}{२^{न-१}गा(\frac{न-१}{२}+१)}(१ - य_१^२)^{\frac{न-१}{२}}$$ यह होगा।

परन्तु यदि जैसे चलराशियों के मान सब धन लिये गये वैसे ही ऋण लिये जाते तो सब मान ऊपर के मान का $२^{न-१}$ गुणित होता। इस

लिये सब मान $= \frac{\pi^{\frac{न-१}{२}}(१ - य_१^२)^{\frac{न-१}{२}}}{गा(\frac{न-१}{२}+१)}$ इस लिये ऊपर के अनेक गुणचल का

मान साधारण चल के रूप में $य_१$ के -१ और $+१$ मान के भीतर

$$\frac{\pi^{\frac{न-१}{२}}}{गा(\frac{न-१}{२}+१)}\int_{-१}^{१} फ(जय_१)(१ - य_१^२)^{\frac{न-१}{२}} ताय_१$$ यह होगा।

(२) $\int\int\int \cdots \frac{\text{फ}(\text{अ}_1\text{य}_1 + \text{अ}_2\text{य}_2 + \cdots + \text{अ}_\text{न}\text{य}_\text{न})}{\sqrt{(१ - \text{य}_1^2 - \text{य}_2^2 - \cdots - \text{य}_\text{न}^2)}} \text{ताय}_\text{न}\text{ताय}_{\text{न}-१} \cdots \text{ताय}_1$

इसको साधारण चल के रूप में ले आना है। जहाँ $\text{य}_1^2 + \text{य}_2^2 + \cdots + \text{य}_\text{न}^2 < १$

यहाँ भी २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से

$\int\int\int \cdots \frac{\text{फ}(\text{जय}_1)}{\sqrt{(१ - \text{य}_1^2 - \text{य}_2^2 - \cdots - \text{य}_\text{न}^2)}} \text{ताय}_\text{न}\text{ताय}_{\text{न}-१} \cdots \text{ताय}_1$ ऐसा होगा।

अब यहाँ य_1 को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने से और $\text{य}_2^2 + \text{य}_3^2 + \cdots + \text{य}_\text{न}^2 < १ - \text{य}_1^2$ इस नियम से चलराशियों के सब धन मान में २१६ वें प्रक्रम से (जैसा कि द, म, न इत्यादि का मान ऊपर (१) उदाहरण में माना है वैसा ही यहाँ भी मान लेने से)

$$\frac{१}{२^{\text{न}-१}} \frac{\{\text{गा}(\frac{१}{२})\}^{\text{न}-१}}{\text{गा}(\frac{\text{न}-१}{२})} \int_0^{१-\text{य}_1^2} (१ - \text{य}_1^2 - \text{च})^{-\frac{१}{२}} \text{च}^{\frac{\text{न}-१}{२} - १} \text{ताय}$$

$$= \frac{१}{२^{\text{न}-१}} \frac{\{\text{गा}(\frac{१}{२})\}^{\text{न}-१}}{\text{गा}(\frac{\text{न}-१}{२})} \frac{\text{गा}(\frac{१}{२})\text{गा}(\frac{\text{न}-१}{२})}{\text{गा}(\frac{\text{न}}{२})} (१ - \text{य}_1^2)^{\frac{\text{न}}{२} - १} \text{ (२१२ वें प्रक्रम से)}$$

$$= \frac{१}{२^{\text{न}-१}} \frac{\{\text{गा}(\frac{१}{२})\}^{\text{न}}}{\text{गा}(\frac{\text{न}}{२})} (१ - \text{य}_1^2)^{\frac{\text{न}}{२} - १}$$

परन्तु यदि चलराशियों के मान ऋण भी लिये जायँ तो स्पष्ट है कि ऊपर का मान $२^{\text{न}-१}$ गुणित होगा।

इसलिये ऊपर के अनेक गुण चल का मान य_1 के -१ और $+१$ मान के भीतर साधारण चल के रूप में

$\frac{\pi^{\frac{\text{न}}{२}}}{\text{गा}(\frac{\text{न}}{२})} \int_{-१}^{+१} \text{फ}(\text{जय}_1) (१ - \text{य}_1^2)^{\frac{\text{न}}{२} - १} \text{ताय}_1$ ऐसा होगा।

२५४। बहुत से त्रिकोणमिति फलों के रूप चलराशिकलन के बल से श्रेढी में ला सकते हैं। जैसे यह चाहना है कि

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{आ}_1\text{ज्याय} + \text{आ}_2\text{ज्या}२\text{य} + \text{आ}_3\text{ज्या}३\text{य} + \cdots + \text{आ}_\text{म}\text{ज्याम}\text{य} \cdots (१)$$

यह समीकरण य के स्थान में ष, २ष, ३ष, ... मष तक उत्थापन देने तक ठीक रहे जहां $\text{ष} = \frac{\pi}{\text{म}+१}$ और आ_1, $\text{आ}_2 \cdots \text{आ}_\text{म}$ स्थिराङ्क हैं। तो यहां सब स्थिराङ्कों के मान जानने के लिये नीचे लिखे हुए म समीकरण उत्पन्न होंगे

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{आ}_1\text{ज्याष} + \text{आ}_2\text{ज्या}२\text{ष} + \text{आ}_3\text{ज्या}३\text{ष} + \cdots + \text{आ}_\text{म}\text{ज्याम}\text{ष}।$$

फ(२ष) = आ$_{१}$ज्या२ष + आ$_{२}$ज्या४ष + आ$_{३}$ज्या६ष + · · · + आ$_{म}$ज्या२मष ।

⋮ ⋮

फ(मष) = आ$_{१}$ज्यामष + आ$_{२}$ ज्या२मष + आ$_{३}$ज्यामष + · · · · + आ$_{म}$ज्याममष ।

इन में पहले को ज्यासष, दूसरे को ज्या२सष, · · · · अन्त को ज्याममष से गुण कर जोड़ देने से दहने पक्ष में आ$_{न}$ का गुणक

ज्यासष ज्यानष + ज्या२सष ज्या२नष + · · · · + ज्यामसष ज्यामनष

यह होगा। इस गुणक का दूना त्रिकोणमिति से

कोज्या (स−न)ष + कोज्या२(स − न)ष + · · · + कोज्याम (स − न)ष

—{ कोज्या (स + न)ष + कोज्या२ (स + न)ष + · · · + कोज्याम(स + न)ष }

यह होगा

इसने ऊपर के श्रेढी का योग त्रिकोणमिति से

$$\frac{\text{ज्या}(\text{२म}+\text{१})\,\frac{(\text{स}-\text{न})}{\text{२}}\text{ष}-\text{ज्या}\,\frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{\text{२}}}{\text{२ ज्या}\,\frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{\text{२}}}$$

$$=\frac{\text{ज्या}\left\{(\text{स}-\text{न})\ -\frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{\text{२}}\right\}-\text{ज्या}\,\frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{\text{२}}}{\text{२ ज्या}\,\frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{\text{२}}}$$ यह होगा और इसी में न के स्थान में −न का उत्थापन दे देने से नीचे के श्रेढ़ी का योग

$$\frac{\text{ज्या}\left\{(\text{स}+\text{न})\,\pi-\frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{\text{२}}\right\}-\text{ज्या}\,\frac{(\text{स}+\text{न})\text{ष}}{\text{२}}}{\text{२ ज्या}\,\frac{(\text{स}+\text{न})\text{ष}}{\text{२}}}$$

यहाँ स्पष्ट है कि यदि स − न यह विषम संख्या होगी तो ऊपर के श्रेढी का योग शून्य होगा और यदि स − न यह सम संख्या होगी तो योग − १ होगा। इसी तरह स + न के विषम संख्या होने से दूसरी का योग शून्य और सम होने से − १ के तुल्य होगा। इस पर से यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि यदि विषम, और सम के वश से जाति का विचार करे तो कह सकते हैं कि यदि न की जाति स से भिन्न हो तो दोनों योग शून्य और एक हो तो —१ होंगे। परन्तु संख्याओं के सिद्धान्त से यदि स—न विषम तो स + न भी विषम होगा और यदि स—न सम तो स + न भी सम होगा इसलिये यदि न,स के समान न हो अर्थात् स से भिन्न हो तो आ$_{न}$ का गुणक शून्य होगा।

यदि न = स तो आ$_{न}$ का गुणक

$ज्या^{२}सष + ज्या^{२}२सष + \cdots + ज्या^{२}मसष$

$= \frac{म}{२} - \frac{१}{२} \{ कोज्या२सष + कोज्या४सष + \cdots + कोज्या२मसष \}$

यह होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से कोटिज्याओं का योग — १ के बराबर होगा। इसलिये ऐसी दशा में $आ_{न}$ का गुणक $\frac{म+१}{२}$ यह होगा।
इसलिये

$$आ_{न} = \frac{२}{म+१} \{ ज्यासष\, फ(ष) + ज्या२सष\, फ(२ष) + \cdots + ज्यामसष\, फ(मष) \}$$

जहाँ स के स्थान में १, २, ··· म का उत्थापन देने से $आ_{१}, आ_{२} \cdots आ_{म}$ इत्यादि स्थिराङ्कों के मान व्यक्त हो जायँगे।

ऊपर अ के मान में यदि म को अनन्त मानें तो श्रेढो के द्वारा जो ४० वें प्रक्रम में चल का स्वरूप दिखलाया है उससे

$आ_{न} = \frac{२}{\pi}\int_{०}^{\pi} ज्यानशफ(श)ताश$ ऐसा होगा और ० और π के भीतर अनन्त तुल्यान्तर य के मानों में

$फ(य) = आ_{१}\, ज्याय + आ_{२}\, ज्या२य + आ_{३}\, ज्या३य + \cdots$ इत्यादि यह समीकरण ठीक होगा।

लाघव से ऊपर के समीकरण को

$फ(य) = \frac{२}{\pi}\, यौ_{१}^{\infty}\, ज्यानय \int_{०}^{\pi} ज्यानशफ(श)ताश$ ऐसा लिखते हैं यहाँ

$यौ_{१}^{\infty}$ यह दिखलाता है कि न के स्थान में क्रम से १, २, ··· ∞ का उत्थापन देने से जितने मान होंगे उनका योग कर दिया गया है। इस सिद्धान्त को ल्यागरेञ्ज (Lagrange) ने निकाला है। इसके विषय पर प्वाइशन (Poisson) का विशेष दिखलाते हैं।

२५५। २३३ वें प्रक्रम से विदित है कि

$$\frac{१-च^{२}}{१-२च\, कोज्या\frac{\pi(श-य)}{द} + च^{२}} = १ + २चकोज्या\frac{\pi(श-य)}{द}$$

$$+ २च^{२}कोज्या\frac{२\pi(श-य)}{द} + २च^{३}कोज्या\frac{३\pi(श-य)}{२} + \cdots\cdots \quad (१)$$

जहाँ च, १ से न्यून है इसलिये श्रेढी का मान सान्त होगा।

(१) के दोनों पक्षों को फ(श) ताश से गुण कर श के वश से चलानयन करो—द, द सीमाओं के भीतर और च को शून्य के समान मान लो तो बायें

पक्ष का अंश शून्य होगा इसलिये यदि इसका हर शून्य न हो तो श्रेढी द्वारा चलानयन की जो विधि है उससे स्पष्ट है कि बायें पक्ष के चल का मान शून्य होगा परन्तु यदि य का मान—द, और द के भीतर हो तो चलानयन के बीच में हर में च कोज्या $\frac{\pi(श-य)}{द}$ जो यह भाग है उसका मान १ के बराबर होगा इसलिये ऐसी स्थिति में हर का मान $(१-च)^२$ यह होगा तब यह नहीं कह सकते कि बायें पक्ष का चल शून्य होगा। ऐसी दशा में इसका मान जानने के लिये कल्पना करो कि श — य = ल और च = १ — $इ_१$

$$तो \int \frac{(१-च^२)फ(श)ताश}{१-२चकोज्या\frac{\pi(श-य)}{द}+च^२} = \int\frac{इ_१(१+च)फ(य+ल)ताल}{इ_१^२+४चज्या^२\frac{\pi ल}{२द}}$$

इसमें निश्चय है कि श—य इसका मान धन वा ऋण जब बहुत ही छोटा होगा उसी समय के मान का तो विचार ही कर रहे हैं इसलिये ज्या चाप का भेद न मानने से और फ(य + ल) = फ(य) कल्पना करने से

$$\int\frac{इ_१(१+च)फ(य+ल)ताल}{इ_१^२+४चज्या^२\frac{\pi ल}{२द}} = इ_१ (१+च)फ(य)\int\frac{ताल}{इ_१^२+\frac{च\pi^२ल^२}{द^२}}$$

$$= २\, इ_१फ(य)\int\frac{ताल}{इ_१^२+\frac{\pi^२ल^२}{द^२}} = \frac{२दफ(य)}{\pi}स्प^{-१}\frac{\pi ल}{इ_१द}$$

इसमें मानो कि ल की सीमा $अ_१$, और — $क_१$ है तो मान

$$\frac{२दफ(य)}{\pi}\left\{स्प^{-१}\frac{\pi अ_१}{इ_१द} + स्प^{-१}\frac{\pi क_१}{इ_१द}\right\} \text{ ऐसा होगा।}$$

इसमें $इ_१$ को शून्य मान लेने से

२ दफ(य) ऐसा होगा। इसलिये यदि य,—द और द के भीतर हो तो फ(य)

$$= \frac{१}{२द}\int_{-द}^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द}यो_१^\infty\int_{-द}^{द} फ(श)\ कोज्या\frac{न\pi(श-य)}{द}ताश \cdots\cdots(२)$$

यदि य = द वा—द तो बायें पक्ष के चल का मान जब श, द और — द के बहुत ही पास होगा श — य = ल $\frac{२दफ(य)}{\pi}$ स्प$^{-१}\frac{\pi ल}{इ_१द}$ इन दोनों समीकरणों से क्रम से द { फ(द) + फ(− द) } यह होगा क्योंकि जब य = द और श = द तब श — य = ल यह समीकरण दिखलाता है कि ल का मान केवल — $क_१$ से ० तक

पहुँचेगा और जब श = — द और य = — द तब ल का मान केवल ० से अ, तक होगा। इसलिये ऐसे समय में (२) का बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ { फ(द) + फ(—द) } यह होगा।

इस प्रकार से द, — द के बीच वा द, — द के तुल्य य के मान में दहने पक्ष का मान निश्चित हो जाता है।

२५६। २५५ वें प्रक्रम की युक्ति से यदि ० और द के बीच श के मान में सान्तचलानयन करो तो

$$फ(य) = \frac{१}{२द}\int_{०}^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द} यौ_{१}^{\infty} \int_{०}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श-य)}{द} ताश \cdots (१)$$

यह समीकरण ० और द के बीच कोई य के मान में सत्य होगा परन्तु यदि य = ० तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (०) और जब य = द तो बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ(द) होगा।

इसी तरह

$$० = \frac{१}{२}\int_{०}^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द} यौ_{१}^{\infty} \int_{०}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श+य)}{द} ताश, \cdots (२)$$

यह ० और द के बीच चाहे जो य का मान मानो समीकरण सत्य होगा। परन्तु जब य = ० तो बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (०) के तुल्य और जब य = द तो बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (द) के तुल्य होगा।

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$फ(य) = य \frac{१}{द}\int_{०}^{द} फ(श)ताश + \frac{२}{द} यौ_{१}^{\infty} कोज्या \frac{न\pi य}{द} \int_{०}^{द} कोज्या \frac{न\pi श}{द} फ(श) ताश \cdots (३)$$

यह य का मान चाहे ० और द के तुल्य हो वा इनके बीच में हो सर्वत्र सत्य रहेगा।

(१) और (२) के अन्तर से

$$फ(य) = \frac{२}{द} यौ_{१}^{\infty} ज्या \frac{न\pi य}{द}\int_{०}^{द} ज्या \frac{न\pi श}{द} फ(श) ताश \cdots\cdots\cdots\cdots (४)$$

यह य का मान यदि ० और द के बीच में हो तब सत्य होगा और जब य = ० और य = द तो बायाँ पक्ष अवश्य शून्य के समान होगा। यदि देखो तो (४) समीकरण ठीक ठीक ल्याग्राञ्ज के सिद्धान्त से मिल जाता है।

थोड़ा सा परिवर्त्तन कर देने से (३) से (४) और (४) से (३) समीकरण उत्पन्न हो जाता है।

जैसे यदि (३) में फ(य) के स्थान में यदि ज्या $\frac{\pi य}{द}$ फ(य) रख दो तो

$$ज्या \frac{\pi य}{द} फ(य) = \frac{१}{द}\int_{0}^{द} ज्या \frac{\pi श}{द} फ(श) ताश$$

$$+ \frac{२}{द} यौ_{१}^{\infty} कोज्या \frac{न\pi य}{द}\int_{0}^{द} कोज्या \frac{न\pi श}{द} ज्या \frac{\pi श}{द} फ(श) ताश$$

इसमें कोज्या $\frac{न\pi श}{द}$ ज्या $\frac{\pi श}{द}$ के स्थान में इसका जो दूसरा

$\frac{१}{२}$ ज्या $\frac{(न+१)\pi श}{द}$ — $\frac{१}{२}$ ज्या $\frac{(न-१)\pi श}{द}$ यह रूपान्तर है इसे रख देने से ज्या $\frac{\pi य}{द}$ फ(य)

$$= \frac{१}{द} यौ_{१}^{\infty} \left\{ कोज्या \frac{(न-१)\pi य}{द} — कोज्या \frac{(न+१)\pi य}{द} \right\} \int_{0}^{द} ज्या \frac{न\pi श}{द} फ(य) ताश$$

ऐसा होजायगा। इसमें { } इसके अन्तर्गत दोनों खण्डों का त्रिकोण-मिति से २ज्या $\frac{न\pi य}{द}$ ज्या $\frac{\pi य}{द}$ ऐसा रूपान्तर कर दोनों पक्षों में ज्या $\frac{\pi य}{द}$ का भाग दे देने से (४) उत्पन्न हो जायगा। और ऊपर जो क्रिया दिखलाया है उसके विपरीत से (४) से (३) यह उत्पन्न हो जायगा।

२५७। इन ऊपर दिखलाये हुए समीकरण रूपी सिद्धान्तों की व्याप्ति दिखलाने के लिये इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) य को जीवा की श्रेढी में ले आना है।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण ग्रहण करो और मान लो कि द $= \pi$ तो यहाँ फ(य) = य इसलिये फ(श) = श

$$इसलिये \int_{0}^{द} ज्या \frac{न\pi श}{द} फ(श)\ ताश = \int_{0}^{\pi} शज्यानश\ ताश$$

$= \frac{\pi}{न}$ यदि विषम और — $\frac{\pi}{न}$ यदि न सम इसलिये

$$य = २ \left\{ ज्याय — \frac{१}{२} ज्या२य + \frac{१}{३} ज्या३य — \frac{१}{४} ज्या४य + \cdots \right\}$$

यह य के ० और π के बीच के मानों में सत्य है और यह भी देख पड़ता है कि यदि य = ० तब भी ठीक है और ऋण मान में भी देखने से स्पष्ट है कि ठीक है इसलिये — π, π के बीच में — π, π को छोड़ और सब मानों में समीकरण ठीक हुआ।

(२) कोज्याय को ज्या की श्रेढी में ले आना है। यहाँ भी २५६ का (४) समीकरण लेने से फ(य) = कोज्याय इसलिये फ(श) = कोज्याश इसलिये यदि द = π तो

$$\int \text{ज्या}\,\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ(श) ताश} = \int \text{कोज्याश ज्यानश ताश}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \{\,\text{ज्या(न + १) श + ज्या(न — १) श}\,\}\ \text{ताश}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{कोज्या(न + १)श}}{\text{न + १}} + \frac{\text{कोज्या(न — १)श}}{\text{न — १}}\right\}$$

इसलिये $\int_0^{\pi}$ कोज्याश ज्यानश ताश = ० यदि न विषम हो

और = $\frac{\text{२न}}{\text{न}^2-\text{१}}$ यदि सम।

इसलिये

$$\text{कोज्याय} = \frac{२}{\pi}\left\{\frac{\text{४ज्या२य}}{२^2 - १} + \frac{\text{८ज्या४य}}{४^2 - १} + \cdots + \frac{१ + (-१)^{\text{न}}}{\text{न}^2 - १}\text{नज्यानय} + \cdots\right\}$$

यह ० और π के बीच, ० और π को छोड़ और य के सब मानों में सत्य है।

(३) (ग) स्थिराङ्क को चाहते हैं कि य की ज्या श्रेढी में ले आवें।

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से और फ(य) = ग, और द = π मान लेने से $\int_0^{\pi}$ ग ज्यानश ताश = ग $\int_0^{\pi}$ ज्यानश ताश = $\frac{\text{२ग}}{\text{न}}$ यदि न विषम, = ०, यदि न सम हो तो

इसलिये

$$\text{ग} = \frac{\text{४ग}}{\pi}\{\,\text{ज्याय} + \tfrac{1}{3}\,\text{ज्या३य} + \tfrac{1}{5}\,\text{ज्या५य} + \cdots\}$$

$\frac{\text{४ग}}{\pi}$ का भाग दे देने से

$$\frac{\pi}{४} = \text{ज्याय} + \tfrac{1}{3}\,\text{ज्या ३य} + \tfrac{1}{5}\,\text{ज्या५य} + \cdots$$

यह ० और π के बीच ० और π को छोड़ और य के सब मानों में ठीक होगा। इसी में यदि य के स्थान में $\frac{\pi}{२}$ — र रख लें तो

$$\frac{\pi}{४} = \text{कोज्यार} - \frac{१}{३}\text{कोज्या३र} + \frac{१}{५}\text{कोज्या५र} - \frac{१}{७}\text{कोज्या७र} + \cdots$$

यह र के $-\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ के बीच $-\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा।

(४) य को इसकी कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण ग्रहण करो और द = π मान लो तो

$$\int \text{शकोज्यानशताश} = \frac{\text{शज्यानश}}{\text{न}} + \frac{\text{कोज्यानश}}{\text{न}^२}$$

इस लिये $\int_०^{\pi}$ शकोज्यानशताश $= -\frac{२}{\text{न}^२}$ यदि न, विषम हो।

और $= ०$ यदि न, सम हो।

और $\int_०^{\pi}$ शताश $= \frac{\pi^२}{२}$ इसलिये

$$\text{य} = \frac{\pi}{२} - \frac{४}{\pi}\left\{\text{कोज्याय} + \frac{१}{३^२}\text{कोज्या३य} + \frac{१}{५^२}\text{कोज्या५य} + \cdots\right\}$$

यह य के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी सत्य होगा।

यदि यहाँ य $= \frac{\pi}{२}$ — र तो र के $-\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ मान में और इनके बीच के मान में भी र $= \frac{४}{\pi}\left(\text{ज्यार} - \frac{१}{३^२}\text{ज्या३र} + \frac{१}{५^२}\text{ज्या५र} \cdots\right)$ यह ठीक रहेगा।

(५) $\text{इ}^{\text{अय}}$ इसको ज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से य के ० और π को छोड़ इनके बीच के मान में

$$\text{इ}^{\text{अय}} = \frac{२}{\pi}\text{यौ}_१^{\infty} \frac{\text{न}}{\text{अ}^२ + \text{न}^२}(१ - \text{कोज्यान}\,\pi \times \text{इ}^{\text{अ}\pi})\ \text{ज्यानय}$$

{ १० वें प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण देखो }

(६) $\text{इ}^{\text{अय}}$ को कोटिज्या की श्रेढीमें ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{इ}^{\text{अय}} = +\frac{\text{इ}^{\text{अ}\pi} - १}{\text{अ}\pi}\ \frac{२\text{अ}}{\pi}\text{यौ}_१^{\infty} \frac{\text{कोज्यान}\pi \times \text{इ}^{\text{अ}\pi} - १}{\text{अ}^२ + \text{न}^२}\ \text{कोज्यानय}$$

यह य के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा।

(७) ज्याअय को ज्या की श्रेढी में ले आवो। जहाँ अ < १ है

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$ज्याअय = \frac{२}{\pi} ज्याअ\pi \left\{ \frac{ज्याय}{१^२ - अ^२} - \frac{२ज्या२य}{२^२ - अ^२} + \frac{३ज्या३य}{३^२ - अ^२} - \frac{४ज्या४य}{४^२ - अ^२} + \cdots \right\}$$

यह य के ० और ० और π के बीच π को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा।

(८) कोज्याअय को कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो। जहाँ अ < १ यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$कोज्याअय = \frac{२}{\pi} ज्याअ\pi \left\{ \frac{१}{२अ} - \frac{अकोज्याय}{अ^२ - १} + \frac{अकोज्या२य}{अ^२ - २^२} - \cdots \right\}$$

यह य के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा।

(९) $इ^{अय} - इ^{-अय}$ इस को ज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} (इ^{अश} - इ^{-अश})\, ज्यानशताश = - \frac{न\,(इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi})}{अ^२ + न^२} कोज्यान\pi$$

इसलिये

$$इ^{अय} - इ^{-अय}$$

$$= \frac{२}{\pi}(इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi}) \left(\frac{ज्याय}{१^२ + अ^२} - \frac{२ज्या२य}{२^२ + अ^२} + \frac{३ज्या३य}{३^२ + अ^२} - \cdot \right)$$

(१०) $इ^{अ(\pi - य)} + इ^{-अ(\pi - य)}$ इसको कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो। यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} \left\{ इ^{अ(\pi - श)} + इ^{-अ(\pi - श)} \right\} कोज्यानशताश = \frac{अ(इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi})}{अ^२ + न^२}$$

$$और \int_0^{\pi} \left\{ इ^{अ(\pi - श)} + इ^{-अ(\pi - श)} \right\} ताश = \frac{इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi}}{अ}$$

$$इसलिये\ \frac{\pi}{२} \frac{इ^{अ(\pi - य)} + इ^{-अ(\pi - य)}}{इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi}} = \frac{१}{२अ^२} + \frac{कोज्याय}{१^२ + अ^२} + \frac{कोज्या२य}{२^२ + अ^२} + \cdots$$

इस प्रकार से हज़ारों उदाहरण सहज में सिद्ध हो जाते हैं।

इन के चलानयन से और भी नये नये चमत्कार उत्पन्न होते चले जाते हैं।

जैसे (२) उदाहरण में जो कोटिज्या का मान ज्या की श्रेढी में आया है उस का यदि ताय से गुण कर चलानयन करो तो ।

$$\frac{\pi}{४} \text{ ज्याय} = \text{स्थिर} - \frac{\text{कोज्या२य}}{१\cdot३} - \frac{\text{कोज्या४य}}{३\cdot५} - \frac{\text{कोज्या६य}}{५\cdot७} - \cdots\cdots$$

इसमें यदि य = ० तो

$$\text{स्थिर} = \frac{१}{१\cdot३} + \frac{१}{३\cdot५} + \frac{१}{५\cdot७} + \cdots\cdots = \frac{१}{२}$$

(चलनकलन के २०वें अध्याय के ४४वें "अभ्यासार्थ" प्रश्न में न = ∞ मान $\frac{१}{१\cdot३}$ जोड़ देने से ।

२५८ । यदि २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण में, जो कि य के ० और द और इन के बीच के सब मान में सत्य है, यदि य का मान द से पार हो तब देखना चाहिये कि दहना पक्ष किस के तुल्य होता है। मानो कि य का मान द और २द के बीच में है और धन है तो यदि य = २ द—य' ऐसा माने जहां य', द से न्यून है तो

$$\text{कोज्या } \frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}} = \text{कोज्या } (२\text{न}\pi - \frac{\pi\text{नय}'}{\text{द}}) = \text{कोज्या } \frac{\text{न}\pi\text{य}'}{\text{द}}$$

इस लिये इस स्थिति में दहने पक्ष का मान फ(य') होगा ।

फिर मानो कि य, २ द से बड़ा है और २ मद + य' इस के तुल्य है जहां य', २ द से अल्प है तो

$$\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}} = \text{कोज्या } \frac{\text{न}\pi\text{य}'}{\text{द}}$$

अर्थात् दहने पक्ष का वही मान हुआ जो कि य के स्थान में य' के रख देने से होता है इस लिये यदि य' ∠ द तो दहने पक्ष का मान फ(य') होगा और यदि य' 7 द ∠ २द तो दहने पक्ष का फ(२द-य') यह मान होगा । इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि य के ऋण मान में भी वही मान होगा जो कि धनमान में होता है ।

इसी तरह यदि य धन और २मद+य' इस के तुल्य हो तो २५६ प्रक्रम के (४) समीकरण का मान फ(य') होगा यदि य' ∠ द और यदि य' 7 द तो दहने पक्ष का मान —फ(२द—य') यह होगा । और य के ऋण मान में वेही मान आवेंगे जो कि य के धनमान में आते हैं केवल धन ऋण चिह्न बदल जायगा ।

२५९ । २५६ प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण में यह कुछ आवश्यकता नहीं कि य का मान ० और द के बीच में लगातार हो किन्तु ० और अ के बीच के य के मान में $फ(य) = फ_1(य)$, अ और क के बीच में य के मान में $फ(य) = फ_2(य)$, और क और ग के बीच में य के मान में $फ(य) = फ_3(य)$, इसी तरह अन्त में ग और द के बीच में य के मान में $फ(य) = फ_4(य)$ ऐसा मान लें तो भी समीकरण सत्य रहेगा केवल जब य = ० वा अ, वा क, वा ग तव व्यभिचरित होगा उस समय २५६ वें प्रक्रम की युक्ति से वास्तव में दहने पक्ष का क्या रूप होगा इसका ज्ञान सहज में हो जायगा। जैसे २५६ वें प्रक्रम के (३) समीकरण का दहना पक्ष जब य = अ तब $\frac{1}{2}\{फ_1(अ) + फ_2(अ)\}$ यह होगा।

इस लिये यदि य = अ तब $फ_1(य) = फ_2(य)$ तो (३) समीकरण जब य = अ तब भी सत्य ठहरेगा।

२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप में एक श्रेढी ऐसी बनानी है जिसका योग ग तुल्य हो य के ० और अ के बीच के मानों में और वही योग शून्य के तुल्य हो य के अ और द के बीच के मानों में।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

फ(य) = ग, इस लिये फ(श) = ग, श के ० और अ के बीच के मानों में और फिर उसके बाद श के अ और द के बीच के मानों में फ(श) = ० = फ(य)

इस लिये

$$\int_0^{द} \text{कोज्या}\frac{न\pi श}{द} फ(श)ताश \text{ यह}$$

$$ग\int_0^{अ} \text{कोज्या}\frac{न\pi श}{द} ताश = \frac{गद}{न\pi} \text{ज्या} \frac{न\pi अ}{द} \text{ ऐसा होगा।}$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढ़ी

$$\frac{गअ}{द} + \frac{२ग}{\pi}\left\{\text{ज्या}\frac{\pi अ}{द}\text{कोज्या}\frac{\pi य}{द} + \frac{१}{२}\text{ज्या}\frac{२\pi अ}{द}\text{कोज्या}\frac{२\pi य}{द} + \frac{१}{३}\text{ज्या}\frac{३\pi अ}{द}\text{कोज्या}\frac{३\pi य}{द} + \cdots\right\}$$

इस में जब य = अ तब इसका मान $\frac{ग}{२}$ होगा।

अथवा इसी जगह २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$ग \int_0^{अ} ज्या \frac{न श \pi}{द} ताश = \frac{ग द}{न \pi} \left(१ - कोज्या \frac{न अ \pi}{द} \right)$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{२ ग}{\pi} \left\{ उ ज्या \frac{\pi अ}{द} ज्या \frac{\pi य}{द} + \frac{१}{२} उ ज्या \frac{२ \pi अ}{द} ज्या \frac{२ \pi य}{द} \right.$$

$$\left. + \frac{१}{३} उ ज्या \frac{३ \pi अ}{द} ज्या \frac{३ \pi य}{द} + \cdots \right\} यह होगी$$

यहां जब य = ० तब यह श्रेढी भी शून्य और जब य = अ तब श्रेढी का मान $\frac{ग}{२}$ होगा।

२६१। एक श्रेढी कोटिज्या के रूप में ऐसी बनावो जिसका योग ज य हो य के ० और $\frac{द}{२}$ के बीच के मान में और जब य, $\frac{द}{२}$ और द के बीच में हो तो वही योग ज (द—य) के तुल्य हो।

यहाँ २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण से।

$$\int_0^{द} फ(श) कोज्या \frac{न \pi श}{द} ताश$$

$$= \int_0^{\frac{द}{२}} ज श कोज्या \frac{न \pi श}{द} ताश + \int_{\frac{द}{२}}^{द} ज(द - श) कोज्या \left(\frac{न \pi श}{द} \right) ताश$$

$$= \frac{ज द^२}{\pi} \left\{ \frac{१}{२ न} ज्या \frac{न \pi}{२} + \frac{१}{\pi न^२} कोज्या \frac{न \pi}{२} - \frac{१}{\pi न^२} \right\} + \frac{ज द^२}{न \pi} \left(ज्या न \pi - ज्या \frac{न \pi}{२} \right)$$

$$- \frac{ज द^२}{\pi} \left\{ \frac{१}{न} ज्या न \pi - \frac{१}{२ न} ज्या \frac{न \pi}{२} + \frac{१}{\pi न^२} कोज्या न \pi - \frac{कोज्या \frac{न \pi}{२}}{\pi न^२} \right\}$$

$$= \frac{ज द^२}{\pi^२ न^२} \left\{ २ कोज्या \frac{न \pi}{२} - कोज्या न \pi - १ \right\}$$

यहि यदि न = ४ म + २ ऐसा होगा तो $- \frac{४ ज द^२}{\pi^२ न^२}$ इसके तुल्य होगा और सर्वत्र शून्य के तुल्य होगा। और

$$\int_0^{द} फ(श) ताश = ज \int_0^{\frac{द}{२}} श ताश + ज \int_{\frac{द}{२}}^{द} (द - श) ताश = \frac{ज द^२}{४}$$

इसलिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{ज द}{४} - \frac{८ ज द}{\pi^२} \left\{ \frac{१}{२^२} कोज्या \frac{२ \pi य}{द} + \frac{१}{६^२} कोज्या \frac{६ \pi य}{द} + \frac{१}{१०^२} कोज्या \frac{१० \pi य}{द} + \cdots \right\}$$

इस श्रेढी का मान यदि र रख लें तो य के ० और $\frac{द}{२}$ मान और इनके बीच के मानों में भी र = ज य और य के $\frac{द}{२}$ और द और इनके बीच के मानों में भी र = ज(द–य) यह होगा। यदि य का मान द से बड़ा हो तो २५८ वें प्रक्रम से र का मान फिर फिर यही आवेगा क्योंकि २५८ वें प्रक्रम से यदि य = २ द—य' जहाँ य', द से छोटा है तो दहना पक्ष फ(य') के अर्थात् जहाँ य, द से छोटा है वहाँ जो र का मान है वही यहाँ पर भी हुआ। इस तरह से २५६ वें प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण से हजारों प्रकार के नये सिद्धान्त बना सकते हो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि य के —π और π और इनके बीच के मानों में

$$\frac{य^२}{४} = \frac{π^२}{१२} — कोज्याय + \frac{कोज्या\ २य}{२^२} — \frac{कोज्या\ ३य}{३^२} + \cdots$$

२। (१) प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\frac{य^३}{१२} — \frac{π^२ य}{१२} = — ज्याय + \frac{ज्या२य}{२^३} — \frac{ज्या३य}{३^३} + \cdots$$

३। सिद्ध करो कि यदि एक श्रेढी ऐसी बनाई जाय जो य के ० और अ के बीच के मानों में शून्य, य के अ और π — अ के बीच के मानों में अ, और फिर य के π — अ और π के बीच के मानों में π — य के तुल्य हो तो

$$\frac{४}{π} \left\{ ज्याअ\ \ ज्याय + \frac{१}{३^२} ज्या३अज्या३य + \frac{१}{५^२} ज्या\ ५अ\ ज्या\ ५\ य + \cdots \right\}$$

२६२। जिस समीकरण में

$$\frac{तार}{ताय},\ \frac{ता^२र}{ताय^२},\ \frac{ता^३र}{ताय^३},\ \cdots\cdots \frac{ता^नर}{ताय^न}$$ क्रम से रहते हैं।

उन्हें क्रम से एक घात, प्रथम सम्बन्ध द्वितीय सम्बन्ध, तृतीय सम्बन्ध,....न सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। एक घात को प्रत्येक सम्बन्ध के साथ मिलाना चाहिये। इसी प्रकार जिसमें $\frac{तार}{ताय}$, $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^२$, $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^३ \cdots\cdots \left(\frac{तार}{ताय}\right)^न$ ये हों उन्हें एक घात प्रथम सम्बन्ध, द्वितीयघात प्रथम सम्बन्ध, तृतीयघात प्रथम सम्बन्ध, न घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। और $\left[\frac{ता^मस}{ताय^म}\right]^न$ यह जिसमें हो उसे न घात म सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं।

२६३। यदि एक घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण का रूप

$मा + ना \frac{तार}{ताय} = ०$ ऐसा हो जहाँ मा और ना, य और र के फल हों और फलों में य और र के घात संख्याओं का योग प्रत्येक पद में एक ही हों तो कल्पना करो कि र = यल $\therefore \frac{तार}{ताय} = ल + य \frac{ताल}{ताय}$।
समीकरण में ना का भाग दे दो तो

$$\frac{मा}{ना} + \frac{तार}{ताय} = ० \text{ वा } \frac{मा}{ना} + ल + य \frac{ताल}{ताय} = ०$$

परन्तु $\frac{मा}{ना}$, $\frac{र}{य}$ वा ल का कोई फल है इसलिये कल्पना करो कि

$\frac{मा}{ना} = फ(ल)$ इसलिये $य \frac{ताल}{ताय} = -\{ल + फ(ल)\}$

$$\therefore \frac{ताय}{य\,ताल} = -\frac{१}{ल + फ(ल)} \quad \therefore ला\left(\frac{य}{ग}\right) = -\int \frac{ताल}{ल + फ(ल)}, \text{ जहाँ}$$

ग कोई स्थिराङ्क है।

अपने सुभीते के लिये जहाँ कहीं लाघव जान पड़े तहाँ य = रल ऐसा मान कर भी ऊपर की क्रिया कर सकते हो।

(१) उदाहरण

कल्पना करो कि $य + र = (य - र) \frac{तार}{ताय}$

यहाँ र = यल मान लो तो $\frac{तार}{ताय} = ल + य \frac{ताल}{ताय}$

$$\therefore ल + य \frac{ताल}{ताय} = \frac{य + र}{य - र} = \frac{१ + ल}{१ - ल} \therefore य \frac{ताल}{ताय} = \frac{१ + ल^२}{१ - ल}$$

$$\therefore \frac{ताय}{यताल} = \frac{१ - ल}{१ + ल^२} = \frac{१}{१ + ल^२} - \frac{ल}{१ + ल^२}$$

इसलिये $ला\left(\frac{य}{ग}\right) = स्प^{-१}ल - \frac{१}{२} ला(१ + ल^२)$

वा $ला\left\{\frac{य}{ग}(१ + ल^२)^{\frac{१}{२}}\right\} = ला \frac{\sqrt{(य^२ + र^२)}}{ग} = स्प^{-१}\frac{र}{य}$

(२) एक ऐसा वक्र बताओ जिसके भुज कोटि का योग उसके अवान्तर स्पर्श-रेखा के समान हो।

यहाँ चलनकलन से अवान्तर स्पर्शरेखा $= र \frac{ताय}{तार} = य + र$, और य = रल,

मान लो $\because \frac{ताय}{तार} = ल + र \frac{ताल}{तार} = \frac{य+र}{र} = ल + १$

$\therefore \frac{तार}{रताल} = १ \therefore ला \left(\frac{र}{ग}\right) = ल = \frac{य}{र}$।

२६४। $\frac{तार}{ताय} + पार = वा \cdots (१)$ इसमें र का मान जानना है जहाँ पा और वा य के कोई फल हैं।

देखो $\frac{ता}{ताय}\left(र इ^{\int पाताय}\right) = \frac{तार}{ताय} इ^{\int पाताय} + पार इ^{\int पाताय}$

$$= इ^{\int पाताय}\left(\frac{तार}{ताय} + पार\right)$$

इसलिये (१) को $इ^{\int पाताय}$ से गुण देने से

$$इ^{\int पाताय}\left(\frac{तार}{ताय} + पार\right) = \frac{ता}{ताय}\left(र इ^{\int पाताय}\right) = वा इ^{\int पाताय}$$

इसलिये चलानयन से

$$र इ^{\int पाताय} = स्थि + \int वा इ^{\int पाताय} ताय$$

और $र = स्थि इ^{-\int पाताय} + इ^{-\int पाताय}\int वा इ^{\int पाताय} ताय$

(१) उदा० $\frac{तार}{ताय} + र = अय^{३}$,

यहाँ $पा = १, \int पाताय = य \therefore इ^{\int पाताय} = इ^{य}$ और $वा = अय^{३}$

$\therefore र = स्थि इ^{-य} + इ^{-य}\int अय^{३} इ^{य} ताय$

$$= स्थिइ^{-य} + इ^{-य} अ \left\{ य^{३} इ^{य} - ३ \int य^{२} इ^{य} ताय \right\}$$

$= स्थिइ^{-य} + अ\ (य^{३} - ३य^{२} + ६य - ६)$

(२) उदा० $(१ + य^{२})\frac{तार}{ताय} - रय = अ$, वा $\frac{तार}{ताय} - \frac{य}{१ + य^{२}} र = \frac{अ}{१ + य^{२}}$

यहाँ $पा = -\frac{य}{१ + य^{२}}, \int पाताय = ला \frac{१}{\sqrt{(१+य^{२})}}$ और $इ^{\int पाताय} = \frac{१}{\sqrt{(१+य^{२})}}$

$$\therefore र \frac{१}{\sqrt{(१ + य^{२})}} = अ \int \frac{ताय}{\sqrt{(१ + य^{२})}} \times \frac{१}{१ + य^{२}} = अ \int \frac{ताय}{(१ + य^{२})^{\frac{३}{२}}}$$

$$= \frac{अय}{\sqrt{(१+य^२)}} + स्थि$$

इसलिये $र = अय + स्थि \sqrt{(१+य^२)}$

२६५। यदि $र^{म-१} \frac{तार}{ताय} + पार^{म} = बा र^{न}$ ऐसा समीकरण हो तो दोनों पक्षों में $र^{न}$ का भाग देकर $र^{म-न} = (म-न)ल$ मान लो तो

$र^{म-न-१} \frac{तार}{ताय} + पार^{म-न} = वा$

और $र^{म-न-१} \frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय}$

$\therefore \frac{ताल}{ताय} + (म-न) पाल = वा$

यह अब ठीक २६४ वें प्रक्रम के समीकरण ऐसा हो गया।

(१) उदा० $श \frac{ताश}{ताचा} - \frac{चश^२}{चा} = - \frac{म}{चा^२}$

यहाँ मान लो कि $श^२ = २ल \therefore श \frac{ताश}{ताचा} = \frac{ताल}{ताचा}$

$$\therefore \frac{ताल}{ताचा} - \frac{२चल}{चा} = - \frac{म}{चा^२}$$

अब इस में $पा = -\frac{२च}{चा} \therefore \int पाताचा = -२ चलाचा = ला \frac{१}{चा^{२च}}$

$\therefore इ^{\int पाताचा} = \frac{१}{चा^{२च}} \therefore ल चा^{-२च} = -म \int चा^{-(२च+२)} ताचा$

$= स्थि + \frac{मचा^{-(२च+१)}}{२च+१} \therefore ल = \frac{श^२}{२} = स्थि चा^{२च} + \frac{म}{(२च+१)चा}$

(२) उदा० $यर^२ तार + र^३ताय = \frac{अताय}{य}$, यहाँ भी ऊपर की क्रिया करने से

$$र^३ = \frac{३अ}{२य} + \frac{स्थि}{य^३}$$

२६६। $मा ताय + ना तार = ०$ यह समीकरण $\int फ(यर) = ग$ इसका तात्कालिक चलन सर्वदा नहीं हो सकता क्योंकि सम्भव है कि $\int फ(यर)$ इसके तात्कालिक चलन में जो कि शून्य के तुल्य होगा किसी गुणक का अप-

वर्त्तन दे दिया गया हो अथवा कोई स्थिराङ्क का लोप हो गया हो मूल समीकरण के वश से। परन्तु जिस स्थान में इसका पूरा रूप हो अर्थात् गुणक का अपवर्त्तन न दिया गया हो वा स्थिराङ्क का लोप मूल समीकरण के वश से न किया गया हो तो चलनकलन की युक्ति से $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय तार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार ताय}}$ इस नियम से र का मान जान सकते हो क्योंकि यहाँ

मा $= \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ और ना $= \frac{\text{तास}}{\text{तार}}$। यहाँ दोनों खण्ड तात्कालिक सम्बन्ध हैं अर्थात् पहले में र को दूसरे में य को स्थिर मान कर सम्बन्ध निकाला गया है।

$$\text{इसलिये स} = \int \text{मा ताय} + \text{फ}_1(\text{र})$$

र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{ता}\int\text{माताय}}{\text{तार}} + \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{ना} \therefore \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}} = \text{ना} - \frac{\text{ता}\int\text{माताय}}{\text{तार}}$$

$$\text{और}\quad \text{फ}_1(\text{र}) = \int\left(\text{ना} - \frac{\text{ता}\int\text{माताय}}{\text{तार}}\right)\text{तार}$$

$$\text{इसलिये स} = \int \text{मा ताय} + \int\left(\text{ना} - \frac{\text{ता}\int\text{माताय}}{\text{तार}}\right)\text{तार} + \text{स्थि}$$

(१) उदा० कल्पना करो कि $\text{तास} = \frac{2\,\text{ताय}}{\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}} - \frac{2\,\text{य तार}}{\text{र}\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}$

$$\text{यहाँ}\quad \text{मा} = \frac{2}{\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}},\ \text{ना} = \frac{-2\,\text{य}}{\text{र}\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तामा}}{\text{तार}} = \frac{2\text{र}}{(\text{य}^2-\text{र}^2)^{\frac{3}{2}}}\ ।\ \frac{\text{ताना}}{\text{ताय}} = \frac{-2}{\text{र}}\left(\frac{-\text{र}^2}{(\text{य}^2-\text{र}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{2\text{र}}{(\text{य}^2-\text{र}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \text{स} = \int \text{मा ताय} + \text{फ}_1(\text{र}) = 2\,\text{ला}\{\text{य} + \sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}\} + \text{फ}_1(\text{र})$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{-2\text{र}}{\{\text{य}+\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}\}\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}} + \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}} = \text{ना} = \frac{-2\,\text{य}}{\text{र}\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}} = \frac{2}{\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}\left\{\frac{\text{र}}{\text{य}+\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}} - \frac{\text{य}}{\text{र}}\right\}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}\left\{\frac{\text{य}^2-\text{र}^2+\text{य}\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}{\text{रय}+\text{र}\sqrt{(\text{य}^2-\text{र}^2)}}\right\} = -\frac{2}{\text{र}}$$

$\therefore$ फ$_1$(र) = स्थि—२ ला र

इसलिये स = ला $\left\{ \frac{य + \sqrt{(य^2 - र^2)}}{र} \right\}^2$ + स्थि ।

जहाँ गुणक से अपवर्त्तन दे दिया गया हो वहाँ पर बड़ी कठिनता पड़ेगी और कोई विधि नहीं है जिससे गुणक का पता लगे, केवल अपने बुद्धि बल से गुणक का पता लगा कर गणित करना चाहिये ।

२६७। इस प्रक्रम में चलनसमीकरण सम्बन्धि कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

(१) एक ऐसे वक्र का पता लगावो जो दिये हुए समीकरण सम्बन्धि वक्र-परम्परा को काटने से निर्दिष्टकोण तुल्य कोण बनावे ।

कल्पना करो कि दिये हुए वक्र का भुज = य और कोटि र और साध्य वक्र का भु = य$_1$ और कोटि र$_1$ है और निर्दिष्ट कोण की स्पर्शरेखा = म है

तो $स्प^{-1}म = स्प^{-1}\frac{तार}{ताय} — स्प^{-1}\frac{तार_1}{ताय_1}$ । $\therefore$ $म = \frac{\frac{तार}{ताय} — \frac{तार_1}{ताय_1}}{१ + \frac{तार}{ताय}\frac{तार_1}{ताय_1}}$

सिद्धवक्र के समीकरण पर से $\frac{तार}{ताय}$ का मान य, र के फल रूप में अर्थात् फ (य,र) ऐसा सिद्ध हो जायगा और योग विन्दु पर दोनों वक्र के भुज कोटि एक ही होंगे इसलिये य$_1$ के स्थान में य और र$_1$ के स्थान में र को रख सकते हैं इन पर से फिर साध्य वक्र का समीकरण भी व्यक्त हो जायगा । ऊपर के समीकरण को ।

$$म \left\{ १ + फ\,(य,र)\,\frac{तार}{ताय} \right\} = फ\,(य,र) — \frac{तार}{ताय}$$ ऐसे लिख सकते हैं जो कि एकघात प्रक्रम सम्बन्धि चलनसमीकरण के ऐसा होगा ।

यदि साध्य वक्र सिद्ध वक्रों को काट कर समकोण बनावे तो म = ∞

इसलिये $१ + फ\,(य,र)\,\frac{तार}{ताय} = ० \therefore \frac{तार}{ताय} = — \frac{१}{फ\,(य,र)}$

जैसे उस वक्र को बताओ जो उन परवलयों को काटने से समकोण बनावे जिनमें शिरःस्थान और य अक्ष एक ही है ।

कल्पना करो कि परवलय का र^2 = ४अय यह समीकरण है

$$\therefore फ\,(य,र) = \frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र} = \frac{र}{२य}$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{२\text{य}}{\text{र}} \text{ इसलिये } \frac{\text{र}^२}{२} = (\text{ग}^२ - \text{य}^२)$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण हुआ जिसका केन्द्र परवलय का शिरःस्थान और वृहद्व्यास य अक्ष पर लम्ब होगा। यहाँ ग का मान अनिश्चित है इसलिये कोई दीर्घवृत्त जिनके व्यासों में $\sqrt{२}$: १ यह सम्बन्ध हो वे सब परवलयों को समकोण पर काटेंगे।

(२) $\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{\text{न}} + \text{प}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{\text{न}} + \text{वा}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{\text{न}-२} + \cdots + \text{था}_{\text{न}} = ०$ जहाँ पा, वा, इत्यादि य, र के फल हैं इसमें र का मान क्या होगा।

इस न घात प्रथमसम्बन्ध चलनसमीकरण में साधारण बीजगणित से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का न विध मान आवेगा इसलिये न विध र का मान चलानयन से निकलेगा और इनका घातरूप एक और मान आवेगा।

जैसे यदि $\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२} = \text{अ}^२ \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \pm \text{अ}$ इसलिये $\text{र} = \text{ग} \pm \text{अय}$ वा $\text{र} = \text{ग}' - \text{अय}$ ये दोनों दिये समीकरण को ठीक रखेंगे और इनका घात $(\text{र} - \text{ग} - \text{अय})(\text{र} - \text{ग}' + \text{अय}) = ०$ यह भी समीकरण को ठीक रखेगा।

इस पर से यह एक उदाहरण बनता है कि उस वक्र को बताओ जिसमें चा = अय + कर हो

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^२\right\}} = \text{अ} + \text{क}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

इससे सिद्ध है कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान स्थिर होगा मानो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{म}$ तो र = मय + ग यह एक सरलरेखा का समीकरण है

$$\therefore \frac{\text{र}-\text{ग}}{\text{य}} = \text{म} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ इसलिये } \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{र}-\text{ग}}{\text{य}}\right)^२\right\}} = \text{अ} + \text{क}\left(\frac{\text{र}-\text{ग}}{\text{य}}\right)$$

यह समीकरण हुआ।

(३) $\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{या}$ इसमें र का मान क्या होगा जहाँ या, य का कोई फल है।

पहले मानो कि $\frac{\text{ता}^२\text{र}}{\text{ताय}^२} = \text{या} \therefore \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right) = \text{या} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \int \text{याताय}$ और $\text{र} = \int\left\{\int \text{याताय}\right\}\text{ताय}$

फिर मान लो कि $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ = या, तो, $\frac{ता}{ताय}\left(\frac{ता^2 र}{ताय^2}\right)$ = या $\therefore \frac{ता^2 र}{ताय^2} = \int$ याताय

फिर ऊपर के ऐसा दो वार चलानयन करो। यहाँ स्थिराङ्क को छोड़ दिया है।

(४) $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ = रा यहाँ (रा, र कोई फल है) र का मान क्या होगा।

मान लो कि $\frac{तार}{ताय} = प \therefore \frac{ता^2 र}{ताय^2} = \frac{ताप}{ताय} = \frac{ताप}{तार}\,\frac{तार}{ताय} = प\,\frac{ताप}{तार}$

$= रा \therefore \frac{प^2}{२} = स्थि + \int रा\, तार$

(५) $\frac{ता^2 र}{ताय^2} + पा\,\frac{तार}{ताय} + वार = ०$ इसमें र का मान क्या होगा।

यहाँ मान लो कि

$$र = इ^{\int शताय} \therefore \frac{तार}{ताय} = श\, इ^{\int शताय},\ \frac{ता^2 र}{ताय^2} = \left(\frac{ताश}{ताय} + श^2\right) इ^{\int शताय}$$

इसलिये $इ^{\int शताय}\left\{श + पाश + वा + \frac{ताश}{ताय}\right\} = ०$

$\therefore\ श^2 + पाश + वा + \frac{ताश}{ताय} = ०$ इसलिये यदि पा और वा स्थिराङ्क हों तो सहज में श का और श पर से र का ज्ञान हो जायगा। क्योंकि यदि पा = आ और वा = का तो

$$श^2 + आश + का + \frac{ताश}{ताय} = \frac{ताश}{ताय} + (श - अ_१)(श - क_१) = ०$$

जहाँ $श^2 + आश + का = ०$ इसमें श का, $अ_१$ और $क_१$ मान हैं।

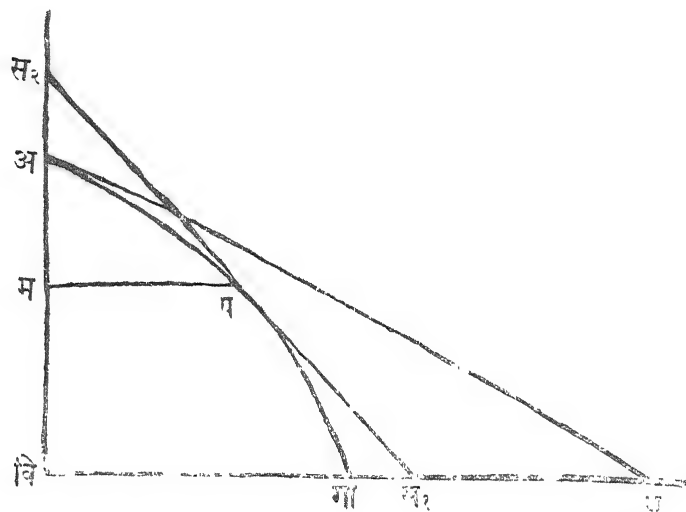
इसमें यदि $श = अ_१$ वा $श = क_१$ तो समीकरण ठीक होता है

इसलिये $र = इ^{\int अ_१ ताय} = इ^{अ_१ य + ग} = ग_१ इ^{अ_१ य}$ वा $र = ग_२ इ^{क_१ य}$ दोनों के योग तुल्य र मानें तो भी समीकरण ठीक होगा इसलिये

$$र = ग_१ इ^{अ_१ य} + ग_२ इ^{क_१ य}$$

$अ^१$ और $क^१$ के सम्भाव्य, असम्भाव्य, और तुल्य होने से इस में कई भेद उत्पन्न होते हैं।

(६) नव हाथ ऊँचे खंभे पर एक मोर बैठा था उसने खंभे की जड़ से २७ हाथ दूरी पर एक साँप को विल की तरफ़ जो कि खंभे की जड़ में थी आते देख उसके ऊपर झपटा। बतावो खंभे की जड़ से कितनी दूरी पर मोर ने साँप को पकड़ा। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि प्रतिक्षण में साँप की गति से दूनी मोर की गति थी।



कल्पना करो कि अवि = खंभा = ९ = अ, विस = साँप विल का अन्तर = २७ = क, सअ = ग, वि विल, स, पहिले साँप का स्थान। अप गा, वह वक्र है जिस में मोर चला। इस का अय रेखा य अक्ष और अ मूल विन्दु है। प्रतिक्षण में जव साँपही के सन्मुख मोर चलता है तव स्पष्ट है कि इष्ट स्थान में जहाँ पर साँप होगा वहाँ से वक्र पर जो स्पर्शरेखा होगी उस के स्पर्शविन्दु पर मोर होगा। मान लो कि इष्ट समय में सर्प का स्थान $स_1$ और वहाँ से वक्र स्पर्शरेखा $स_1$ प। प, उस समय में मोर का स्थान और उसका भुज = अम = य और कोटि = पम = र हैं। मोर गति और साँप गति का सम्वन्ध = $इ_2$ मान रखो तो चलनकलन से।

$$स्प \angle स_2 = \frac{तार}{ताय}, स_2म = \frac{र\,ताय}{तार}, स_2वि = अ - य + \frac{र\,ताय}{तार},$$

$$विस_1 = \frac{तार}{ताय}(अ-य) + र \text{ । इस } सस_2 = क - र(-अ-य)\frac{तार}{ताय}$$

$$\text{इसलिये अप चाप} = च = इ \times सस_2 = इक - इ \left\{ र + (अ-य)\frac{तार}{ताय} \right.$$

इसका य के वश तात्कालिक सम्वन्ध निकालने से

$$\frac{\text{तांचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ १ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^{२}\right\}} = -\text{इ}_{१}(\text{अ}-\text{य})\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = \text{इ}_{१}(\text{य}-\text{अ})\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]$$

इसलिये

$$\frac{\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}} = \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\sqrt{\left\{१+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{२}\right\}}} = \frac{-\text{ताय इ}_{२}}{\text{अ}-\text{य}} \quad \text{यदि } \frac{१}{\text{इ}_{१}} = \text{इ}_{२}$$

चलानयन करने से

$$\text{स्थि} + \text{ला}(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_{२}} = \text{ला}\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{१+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{२}\right\}}\right]$$ (८ वें प्रक्रम के (६) वें उदाहरण से)

इसमें यदि य = ० तो

$$\text{स्थि} + \text{ला}(\text{अ})^{\text{इ}_{२}} = \text{ला}[\text{स्प} < \text{अ} + \sqrt{\{१ + \text{स्प}^{२} < \text{अ}\}}]$$

$$= \text{ला}\left(\frac{\text{क}}{\text{अ}} + \frac{\text{ग}}{\text{अ}}\right) = \text{ला}(\text{क}+\text{ग}) - \text{ला}(\text{अ})$$

इसलिये $\text{स्थि} = \text{ला}(\text{क}+\text{ग}) - \text{ला}(\text{अ})^{\text{इ}+१}$ इसका उत्थापन (१) में देने से

$$\text{ला}\left\{\frac{(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_{२}}(\text{क}+\text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_{२}+१}}\right\} = \text{ला}\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{१+\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^{२}\right\}}\right]$$

लघुरिक्थ को उड़ा देने से

$$\frac{(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_{२}}(\text{क}+\text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}२+१}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{१+\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^{२}\right\}} \cdots\cdots\cdots (२)$$

$$\frac{\text{अ}^{\text{इ}_{२}+१}}{(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_{२}}(\text{क}+\text{ग})} = \frac{१}{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{१+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{२}\right\}}} = \sqrt{\left\{१+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{२}\right\}} - \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdots\cdots\cdots (३)$$

(२) और (३) के अन्तर से

$$\frac{२\,\text{तार}}{\text{ताय}} = \left[\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}}\right]^{\text{इ}_{२}}\left[\frac{\text{क}+\text{ग}}{\text{अ}}\right] - \left[\frac{\text{अ}}{\text{अ}-\text{य}}\right]^{\text{इ}^{२}}\left[\frac{\text{अ}}{\text{क}+\text{ग}}\right]$$

इसलिये चलानयन से

$$२\,\text{र} + \text{स्थि} = \frac{\text{अ}^{\text{इ}_{२}}}{१-\text{इ}_{२}}\left[\frac{\text{अ}}{\text{क}+\text{ग}}\right](\text{अ}-\text{य})^{१-\text{इ}_{२}}$$

$$-\frac{१}{अ^{इ_२}(१+इ_२)}\left[\frac{क+ग}{अ}\right](अ-य)^{१+इ_२}$$

इसमें $य = ०$ तो

$$स्थि = \frac{अ}{१-इ_२}\cdot\frac{अ}{क+ग} - \frac{अ}{१+इ_२}\left(\frac{क+ग}{अ}\right) = \frac{-क+ग}{१-इ_२} - \frac{क+ग}{१+इ_२}$$

$$= \frac{-क - इ_२क + ग + गइ_२ - क + इ_२क - ग + इ_२ग}{१ - इ_२^२} = \frac{२इ_२ग - २क}{१ - इ_२^२}$$

इसका उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$र = \frac{अ^{इ_२}}{२(१-इ_२)}\left[\frac{अ}{क+ग}\right](अ-य)^{१-इ_२}$$

$$-\frac{अ^{-इ_२}}{२(१+इ_२)}\left[\frac{क+ग}{अ}\right](अ-य)^{+१इ_२} - \frac{-क+इ_२ग}{१-इ_२^२} \quad \ldots\ldots (४)$$

इसमें यदि $य = अ$ तो बिल से साँप और मोर का योग

$$= \frac{-क+इ_२ग}{१-इ_२^२} = -\frac{-क+\frac{ग}{इ_१}}{१-\frac{१}{इ_१^२}} = -\frac{-कइ_१^२+इ_१ग}{इ_१^२-१}$$

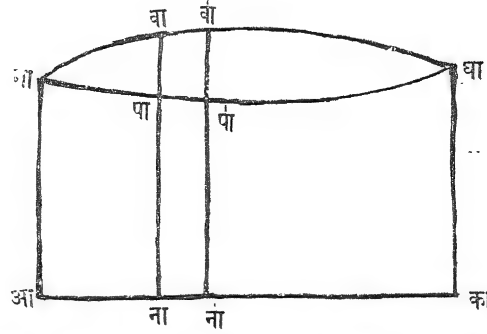
$$= \frac{इ_१^२क - इ_१क}{इ_१^२ - १}$$ इतने अन्तर पर हुआ ।

इस पर से यदि संख्यात्मक मान निकालो तो १७·०३ इतना होगा । भास्कराचार्य ने जो अपनी लीलावती के क्षेत्र व्यवहार में मोर और साँप का प्रश्न लिखा है उसमें दोनों की गति तुल्य माना है इसलिये $इ_१ = १$ इस पर से ऊपर की क्रिया करो तो बिल से अनन्त दूर पर भिन्न दिशा में योग आता है इसलिये भास्कर का उदाहरण अशुद्ध है । भास्कराचार्य ने जो त्रिभुजगणित की युक्ति से अपने उदाहरण का उत्तर निकाला है वह ठीक नहीं क्योंकि मयूर कोई देवता नहीं कि उसे पहले से मालूम हो जाय कि मैं इस सरल मार्ग से चलकर जब तक पृथ्वी के जिस स्थान पर पहुँचूँगा तब तक साँप भी चल कर उसी स्थान पर पहुँच जायगा ।

वैशेषिक कलन ।

२६८ । यदि य का फल ज्ञात हो तो चलनकलन की युक्ति से उसके महत्तम और न्यूनतम मान का प्रमाण भी मालूम हो जाता है परन्तु बहुत से ऐसे प्रश्न हैं जिनमें य के फल ही का पता लगाना पड़ता है जिसमें महत्तम वा न्यूनतम का धर्म्म हो । जैसे दो दिये हुए बिन्दुओं के बीच में परमाल्प अन्तर जानना है तो

यहाँ न्यूनतम अन्तर जानने के लिये उस वक्र का पता लगाना पड़ेगा जिसका चाप दोनों विन्दुओं के अन्तर्गत परमाल्प हो। यदि गा घा दो निर्दिष्ट विन्दु हों तो यहाँ दोनों विन्दुओं पर गये गापाघा, गावाघा इत्यादि वक्रों में से एक ऐसे वक्र को चुनना चाहिये जिसका चाप औरों के चाप से छोटा हो। ऐसे



वक्र का क्या समीकरण होगा इसके लिये एक वक्र के पा विन्दु से दूसरे वक्र के वा विन्दु का पता लगाना पड़ेगा। इस पा और वा विन्दु का जो अन्तर है इसे पाना कोटि की वैशेषिक गति कहते हैं इसको "वै" से प्रकाश करेंगे। जैसा गापाघा वक्र के पा विन्दु का भुज = आना = य और कोटि = पाना = र मानो तो यदि पावा बहुत ही छोटा हो तो ता और वै में इस प्रकार का भेद है अर्थात् र + तार इससे गापाघा वक्र में पा विन्दु के बहुत ही पास में जो पा' विन्दु है उसकी कोटि पा'ना' समझी जाती है और र + वैर इससे दूसरा वक्र जो गावाघा है उसमें पा विन्दु के बहुत ही पास जो वा विन्दु है उसकी कोटि वाना समझी जाती है।

२६९। ऊपर के क्षेत्र में नापा = र ∴ ना'पा' = र + तार और नावा = र + वैर इसलिये ना'वा' = नावा + ता (नावा) = र + वैर + ता (र + वैर)
और ना'वा' = ना'पा' + वै (ना'पा') = र + तार + वै (र + तार) इसलिये

र + वैर + ता (र + वैर) = र + वैर + तार + तावैर

= र + तार + वै (र + तार) = र + तार + वैर + वैतार इसलिये

तावैर = वैतार

अर्थात् वैशेषिकगति की तात्कालिकी गति और तात्कालिकी गति की वैशेषिकगति दोनों परस्पर तुल्य हैं।

इसी प्रकार यदि तार को र मान लो तो

तावैतार = वै ता^{२}र, वा तावैतार = तातावैर = ता^{२}वैर

∴ ता^{२}वैर = वैता^{२}र और इसी तरह ता^{न}वैर = वैता^{न}र।

यदि र की तात्कालिकी गति = $र_{१}$—र यह हो और र की वैशेषिकगति बहुत ही अल्प हो तो ऊपर के सिद्धान्त से

वै तार = वै ($र_{१}$—र) = $वैर_{१}$-वैर = तावैर यह भी सिद्ध कर सकते हैं।

२७०। इसी तरह यदि $\int स = स_१$ तो $स = तास_१$

$\therefore$ $वैस = वैतास_१ = तावैस_१$ इसलिये $\int वैस = \int वैतास_१ = \int तावैस_१$

$= वैस_१ = वै \int स$ और $\int^{२} वैस = \int वै \int स = वै \int\int स = वै \int^{२} स$

इसी तरह $\int^{न} वैस = वै \int^{न} स$

$\int^{न}$ इस से समझो कि वार वार न वार चलानयन किया गया है।

२७१। ऊपर के सिद्धान्तों के देखने से यह स्पष्ट होता है कि तात्कालिक और वैशेषिक के गणितों मे केवल ता और वै का भेद है अर्थात् ता के स्थान में वै को रख देने से सब गणित तात्कालिकी गति के ऐसा हो जाता है। जैसे यदि $स = र^{न}$ तो चलनकलन से $तास = नर^{न-१}तार$

इस में ता के स्थान में वै को रख देने से $वैस = नर^{न-१}वैर$

इसी तरह यदि स = फ(य,र,प,व, इ०) जहां प,व इ०

$\frac{तार}{ताय}, \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}$ इ० हैं तो चलनकलन से

$$तास = \frac{तास}{ताय}ताय + \frac{तास}{तार}तार + \frac{तास}{ताप}ताप + \frac{तास}{ताव}ताव + इ०$$

$$= मा\ ताय + ना\ तार + पा\ ताप + बा\ ताव + इ०$$

जहां $मा = \frac{तास}{ताय}, ना = \frac{तास}{तार}, \frac{तास}{ताप} = पा, \frac{तास}{ताव} = वा,$ इ०

इस में ता के स्थान में वै को रख देने से

$$वैस = मा\ वैय + ना\ वैर + पा\ वैप + व\ \ वैव + इ०$$

२७२। $वै.\int स$, वा. $\int वैस$ इस का मान यदि जानना हो जहां स, य, र, और इनके तात्कालिकी गति का कोई फल हो और य, र, ट चलराशि का फल हों तो

$$तास = मा\ ताय + ना\ ता^{२}य + पाता^{३}य + वा\ ता^{४}य + \cdots$$
$$+ मतार + न\ ता^{२}र + प\ ता^{३}र + व\ ता^{४}र + \cdots$$

परन्तु $ता^{२}य = ता\ ताय$, $ता^{३}य = ता\ ता^{२}य$

इस लिये ता के स्थान में वै को रख देने से

$$वैस = मा\ वैय + ना\ वैताय + पा\ वैता^{२}य + वा\ वैता^{३}य + \cdots$$
$$+ म\ वैर + न\ वैतार + प\ वैता^{२}र + व\ वैता^{३}र + \cdots$$

इस लिये $\int$ वैस = $\int$ (मावैय + नावैताय + पावैता^{2}य + बावैता^{3}य + · · ·)

+ $\int$ (म वैर + न वैतार + पवैता^{2}र + बवैता^{3}र + · · ·)

परन्तु खण्डचलानयन से

$\int$ नावैताय = $\int$ नातावैय = नावैय — $\int$ तानावैय ।

$\int$ पावैता^{2}य = $\int$ पाता^{2}वैय = पातावैय— $\int$ तापा तावैय

= पातावैय—तापावैय + $\int$ ता^{2}पावैय ।

$\int$ बावैता^{3}य = $\int$ बाता^{2}वैय = बाता^{2}वैय— $\int$ ताबाता^{2}वैय

= बाता^{2}वैय—ताबातावैय + $\int$ ता^{2}बातावैय

= बाता^{2}वैय—ताबातावैय + ता^{2}बावैय— $\int$ ता^{2}बावैय

इ०　　　　इ०　　　　इ०

इसी तरह

$\int$ नवैतार = $\int$ नतावैर = नवैर— $\int$ तानवैर ।

$\int$ पवैता^{2}र = $\int$ पता^{2}वैर = पतावैर—तापवैर + $\int$ ता^{2}पवैर ।

$\int$ बवैता^{3}र = बता^{2}वैर—ताबतावैर + ता^{2}बवैर— $\int$ ता^{2}बवैर ।

इन सबका उत्थापन $\int$ वैस में देने से

$\int$ वैस = (ना—तापा + ता^{2}बा—इ०) वैय + (न—ताप + ता^{2}ब—इ०) वैर

+ (पा—ताबा + इ०) तावैय + (प—ताब + इ) तावैर

+ (बा—ताभा + इ०) ता^{2}वैय + (ब—ताभ + इ०) ता^{2}वैर

+ $\int$ (मा—ताना + ता^{2}पा—ता^{3}बा + इ०) वैय

+ $\int$ (म—तान + ता^{2}प—ता^{3}ब + इ०) वैर

इसके देखने से स्पष्ट होता है कि वैय, तावैय, इत्यादि के और वैर, तावैर इत्यादि के गुणकों में साजात्य धर्म है। इस लिये एक चल स के मान में ल को और मानें तो इसके वश से $\int$ वैस में उसी चाल के और खण्ड होंगे जैसा कि वैय और वैर के वश से उत्पन्न हुए हैं।

२७३। यदि स = शाताय जहां $\int$ शाताय इस के वैशेषिक का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि

$$\text{ताशा} = \text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \text{वाताव} + \text{भाताभ} + \text{इ०}$$

$$\text{जहाँ}\quad \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},\ \text{ब} = \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2},\ \text{भ} = \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}\ \text{। इ०}$$

$$\text{और}\quad \text{मा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}},\ \text{ना} = \frac{\text{ताशा}}{\text{तार}},\ \text{पा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}},\ \text{इ०}$$

इसलिये

$$\text{वैशा} = \text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \text{वा वैव} + \text{भा वैभ} + \text{इ०}$$

$$\text{अब}\quad \text{वै}\int\text{शाताय} = \int\text{वै (शाताय)} = \int(\text{शा वैताय} + \text{ताय वैशा})$$

$$= \int(\text{शा तावैय} + \text{तायवैशा}) = \int\text{शा तावैय} + \int\text{तायवैशा}$$

$$= \text{शावैय} + \int(\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा})$$

$$\text{परन्तु}\quad \int(\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा}) = \int\text{ताय (मावैय + नावैर + पावैप} + \cdots)$$

$$- \int\text{वैय (माताय + नातार + पाताप} + \cdots)$$

$$= \int\text{ना(वैर} - \text{पवैय)ताय} + \int\text{पा(वैप} - \text{बवैय)ताय} + \int\text{वा(वैव} - \text{भवैय)ताय} + \cdots$$

$$\text{अब यहां}\quad \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},\ \text{ब} = \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}},\ \text{भ} = \frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}$$

इस लिये

$$\text{वैप} = \frac{\text{तायवैतार} - \text{तारवैताय}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{वैतार} - \text{पवैताय}}{\text{ताय}}$$

$$\because\ \text{वैप} - \text{बवैय} = \frac{\text{वैतार} - \text{पतावैय} - \text{तापवैय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}(\text{वैर} - \text{पवैय})$$

और $वैव = \frac{तायवैताप - तापवैताय}{ताय^2} = \frac{तावैप - वतावैय}{ताय}$

$$\therefore वैब - भवैय \frac{तावैप - वतावैय - ताववैय}{ताय} = \frac{ता}{ताय}(वैप - ववैय)$$

और कल्पना करो कि

$वैर - पवैय = ह \therefore वैप - ववैय = \frac{ताह}{ताय}$ । $वैव - भ वैय = \frac{ता^2ह}{ताय^2}$ इ०

इस लिये

$$वै\int शाताय = शावैय + \int नाहताय + \int पा\frac{ताह}{ताय}ताय + \int बा\frac{ता^2ह}{ताय^2}ताय + \cdots$$

$$परन्तु \int पा\frac{ताह}{ताय}ताय = पाह - \int ह\frac{तापा}{ताय}ताय$$

$$\int वा\frac{ता^2ह}{ताय^2}ताय = वा\frac{ताह}{ताय} - \int\frac{तावा}{ताय}\frac{ताह}{ताय}ताय$$

$$= वा\frac{ताह}{ताय} - ह\frac{तावा}{ताय} + \int ह\frac{ता^2वा}{ताय^2}ताय$$

$$और \int भा\frac{ता^3ह}{ताय^3}ताय = भा\frac{ता^2ह}{ताय^2} - \frac{ताभा}{ताय}\frac{ताह}{ताय} + ह\frac{ता^2भा}{नाय^2}$$

$$- \int ह\frac{ता^3भा}{ताय^3}ताय$$

$$इस\ लिये\ वै\int शाताय = शावैय + \left(पा - \frac{ताबा}{ताय} + \frac{ता^2भा}{ताय^2} - इ०\right)ह$$

$$+ \left(वा - \frac{ताभा}{ताय} + \frac{ता^2भा_1}{ताय^2} - इ०\right)\frac{ताह}{ताय}$$

$$+ \left(भा - \frac{ताभा_1}{ताय} + इ०\right)\frac{ता^2ह}{ताय^2} + इ०$$

$$+ \int\left(ना - \frac{तापा}{ताय} + \frac{ता^2वा}{ताय^2} - \frac{ता^3भा}{ताय^3} + इ०\right)ह\ ताय$$

इस तरह से स्पष्ट देख पड़ता है कि $\int$ शाताय इसके वैशेषिक गति में दो भाग हैं एक चल चिह्न के अन्तर्गत और दूसरा चल चिह्न रहित इसमें जब $य_1$ और $र_1$ तब शा, पा आदि का मान $शा_1$, $पा_1$ इत्यादि और जब $य_2$ और $र_2$ तब शा, पा आदि का मान $शा_2$, $पा_2$ इत्यादि मानो तो $य_2$, और $य_1$ सीमा के भीतर,

$\text{वै}\int \text{शाताय}$, इसका मान

$$\text{शा}_2\text{वैय}_2 - \text{शा}_1\ \text{वैय}_1 + \left(\text{पा}_2 - \frac{\text{तावा}_2}{\text{ताय}_2} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}_2}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}_2 \cdot$$

$$- \left(\text{पा}_1 - \frac{\text{तावा}_1}{\text{ताय}_1} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}_1}{\text{ताय}_1^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}_1 + \text{इ०}$$

$$+ \int_{\text{य}_1}^{\text{य}_2} \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{वा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह ताय}।$$

२७४। यदि स = फ (य,र,ल) जहां य का र और ल फल हैं तो यहां भी ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से कल्पना कर सकते हो कि

$$\text{ताशा} = \text{मा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ता प} + \text{वा ता व} + \text{इ०}$$
$$+ \text{ब\'{ा} ताला} + \text{प\'{ा} ताय\'{ा}} + \text{न व\'{ा} ताव\'{}} + \text{इ०}$$

इस लिये

$$\text{वैशा} = \text{मा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पावैप} + \text{पावैव} + \text{इ०}$$
$$+ \text{न\'{ा} वैल} + \text{प\'{ा} वै प\'{}} + \text{व\'{ा} वैव\'{}} + \text{इ०}$$

यहां न́ा, प́ा इत्यादि उसी चाल के हैं जैसे कि ना, पा इ० हैं अर्थात् र के स्थान में ल को रख देने से न́ा प́ा इ० हो जांयगे।

यहां भी यदि वैल — प́ वैय = ह́ तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{वै}\int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \left(\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}$$
$$+ \left(\text{प\'{ा}} - \frac{\text{ताव\'{ा}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{भ\'{ा}}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह\'{}}$$
$$+ \left(\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \text{इ०}\right)\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$
$$+ \left(\text{ब\'{ा}} - \frac{\text{ताभ\'{ा}}}{\text{ताय}} + \text{इ०}\right)\frac{\text{ताह\'{}}}{\text{ताय}} + \text{इ०}$$
$$+ \int \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{बा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह ताय}$$
$$+ \int \left(\text{न\'{ा}} - \frac{\text{ताप\'{ा}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{ब\'{ा}}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह\'{} ताय}$$

२७५। जिस युक्ति से चलनकलन में सिद्ध है कि यदि र = फ (य) और र का महत्तम वा न्यूनतम मान हो तो तार = ० उसी युक्ति से जिस समय

$\int_{य_1}^{य_2}$ शाताय इसका मान महत्तम वा न्यूनतम होगा उस समय वै $\int_{य_1}^{य_2}$ शा ताय $= ०$ ऐसा होगा। परन्तु जब वै इसका मान ऐसे समय में सर्वदा शून्य होगा तब कह सकते हैं कि २७३ वें प्रक्रम में वैशेषिक का मान जो दो खण्ड में एक चल-चिह्नान्तर्गत और दूसरा चलचिह्न रहित में सिद्ध हुआ है वे दोनों पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे जैसे।

(१) उदाहरण, दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर जानना है यहां

$$\int शाताय = \int \sqrt{(१ + \frac{तार^२}{ताय^२})}\, ताय = \int \sqrt{(१ + प^२)}\, ताय$$

$$इसलिये\ \ शा = \sqrt{(१ + प^२)}\ \therefore ताशा = \frac{प}{\sqrt{(१ + प^२)}}\, ताप$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि इसे २७३ वें प्रक्रम में ताशा का जो रूप है उसके साथ तुलना करो तो

$$मा = ०,\ \ ना = ०\ पा = \frac{प}{\sqrt{(१ + प^२)}},\ बा = ०,$$

और चल चिह्नान्तर्गत मान को शून्य के तुल्य करने से

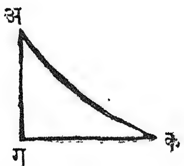
$$ना - \frac{तापा}{ताय} = ० \therefore \frac{तापा}{ताय} = ० \therefore पा = स्थिराङ्क = ग = \frac{प}{\sqrt{(१ + प^२)}}$$

$$तब\ ग^२ = \frac{प^२}{१ + प^२} \therefore १ - ग^२ = \frac{१}{१ + प^२}\ और\ प = \frac{ग}{\sqrt{(१ - ग^२)}}\ = अ$$

इस लिये

$\frac{तार}{ताय} = अ$ तब $र = अय + क$ अर्थात् दोनों विन्दुओं में परमाल्प अन्तर उस वक्र का चाप होगा जिसका समीकरण $अय + क = र$ यह अर्थात् सरलरेखा-रूप होगा।

(२) दो विन्दुओं के बीच में एक ऐसा वक्र बनावो जिसमें ऊपर के विन्दु से कोई पिण्ड पृथ्वी के आकर्षण से उसके चाप में चल कर परमाल्प काल में नीचे की विन्दु पर पहुँचे। यहां चाप का प्रमाण चा।



अग = र, कग = य, $\angle$अगक = समकोण, पृथ्वी के आकर्षण का बल = वे मानो तो गतिविद्या से अ से क तक चाप की राह से पिण्ड के आने में काल

सेकण्ड में $= \int \frac{\sqrt{\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}}}{\sqrt{2\text{वेर}}}\,\text{ताय} = \frac{१}{\sqrt{२वे}}\int \frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{\sqrt{\text{र}}}\,\text{ताय} = \frac{१}{\sqrt{२वे}}\int \text{शा ताय}$

$\therefore \text{शा} = \frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{\sqrt{\text{र}}}$ और $\text{ताशा} = -\frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{२\text{र}^{\frac{३}{२}}}\text{तार} + \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}}\,\text{ताप}$

इस लिये

$$\text{मा} = ०,\ \text{ना} = -\frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{२\text{र}^{\frac{३}{२}}},\ \text{पा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}},\ \text{वा} = ०$$

और $\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = ०\ \therefore \text{ना} = \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}}$ इसलिये इसका उत्थापन ताशा में देने से

$\text{ताशा} = \text{तापा}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पा ताप} = \text{तापाप} + \text{पा ताप} = \text{ता}\,(\text{प}\times\text{पा})$

इसलिये $\text{शा} = \text{पा}\times\text{प} + \text{ग}$ जहाँ ग कोई स्थिराङ्क है ।

अब $\text{शा} = \text{पाप} + \text{ग} = \frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{\sqrt{\text{र}}} = \frac{\text{प}^२}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}} + \text{ग}$

$\therefore \frac{१}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}} = \text{ग} = \frac{१}{\sqrt{२\text{अ}}}\ \therefore \sqrt{(१+\text{प}^२)} = \sqrt{\frac{२\text{अ}}{\text{र}}}$ और

$\text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{२\text{अ}-\text{र}}{\text{र}}}$ यह एक चक्रालद का समीकरण है (चलनकलन देखो)

(३) उदाहरण । दो वक्रों के बीच में परमाल्प अन्तर निकालो अर्थात् दोनों वक्रों में एक एक ऐसी विन्दु ठहरावो जिनमें परमाल्प अन्तर हो ।

यहाँ (१) उदाहरण से दो विन्दुओं में परमाल्प अन्तर का समीकरण $\text{र} = \text{अय} + \text{क}$ और $\text{शा} = \sqrt{(१+\text{प}^२)}$ जहाँ प = कोई स्थिराङ्क ।

मान लो कि दोनों दिये हुए वक्रों में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{म},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{न}$ और जिन विन्दुओं को परमाल्प अन्तररूप सरलरेखा दोनों वक्रों को काटती है उन विन्दुओं के क्रम से भुज कोटि $\text{र}_१$, $\text{य}_१$ और $\text{र}_२$, $\text{य}_२$ हैं तो

$$\frac{\text{वैर}_१}{\text{वैय}_१} = \frac{\text{तार}_१}{\text{ताय}_१} = \text{म} \text{ और } \frac{\text{वैर}_२}{\text{वैय}_२} = \frac{\text{तार}_२}{\text{ताय}_२} = \text{न}$$

परन्तु २७३ प्रक्रम में महत्तम और न्यूनतम मान में

$$\text{शा}_२\,\text{वैय}_२ - \text{शा}_१\,\text{वैय}_१ + \text{पा}_२\,\text{ह}_२ - \text{पा}_१\,\text{ह}_१ = ०$$

परन्तु अन्तिम विन्दुओं का वैशेषिक गमन भी शून्य होगा ।

इसलिये $\text{शा}_1\, \text{वैय}_1 + \text{पा}_1\, \text{ह}_1 = 0$, $\text{शा}_2\, \text{वैय}_2 + \text{पा}_2\, \text{ह}_2 = 0$

ह_1 और ह_2 का मान २७३ वें प्रक्रम में जो है उसका उत्थापन देने से

$$\text{शा}_1\, \text{वैय}_1 + \text{पा}_1 (\text{वैर}_1 - \text{प}_1\, \text{वैय}_1) = 0 \quad \cdots \quad (१)$$

$$\text{शा}_2\, \text{वैय}_2 + \text{पा}_2 (\text{वैर}_2 - \text{प}_2\, \text{वैय}_2) = 0 \quad \cdots \quad (२)$$

(१) से $\text{शा}_1 + \text{पा}_1 \text{म} - \text{पा}_1\, \text{प}_1 = 0 \;\therefore\; \text{म} = \text{प}_1 - \frac{\text{शा}_1}{\text{पा}_1} = -\frac{1}{\text{प}_1} = -\frac{1}{\text{ग}}$

(२) से $\text{शा}_2 + \text{पा}_2 \text{न} - \text{पा}_2\, \text{प}_2 = 0 \;\therefore\; \text{न} = \text{प}_2 - \frac{\text{शा}_2}{\text{पा}_2} = -\frac{1}{\text{प}_2} = -\frac{1}{\text{ग}}$

$\therefore\; 1 + \text{ग म} = 0$ और $1 + \text{ग न} = 0$ ।

यह दोनों समीकरण दिखलाते हैं कि सरलरेखा दोनों वक्रों को काटने से समकोण बनाती है। और दोनों विन्दुओं पर गई हुई सरलरेखा का समीकरण $\text{र} - \text{र}_1 = \frac{\text{र}_2 - \text{र}_1}{\text{य}_2 - \text{य}_1} (\text{य} - \text{य}_1) \;\therefore\; \text{ग} = \frac{\text{र}_2 - \text{र}_1}{\text{य}_2 - \text{य}_1}$ इसका उत्थापन $1 + \text{गम}$ और $1 + \text{गन}$ में देने से दो समीकरण होंगे और वक्रों के समीकरण पर से य_2 और य_1 के फल के वश से र_2, र_1 के जानने के लिये दो समीकरण और होंगे इस तरह से चारो समीकरणों पर से य_2, य_1, र_2, र_1 चारो के मान व्यक्त हो जायँगे ।

(४) ऐसा वक्र बताओ जिसके चाप, अवलूत के चाप, और वक्र जातीय व्यासार्द्ध से उत्पन्न क्षेत्रफल न्यूनतम हो । यहाँ १३१ वें प्रक्रम से यदि फल का मान आ मानो तो

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताय}} = \frac{\text{वि}}{2} \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} = \frac{(1 + \text{प}^2)^{\frac{3}{2}}}{-2\text{व}} \sqrt{(1 + \text{प}^2)} = \frac{(1 + \text{प}^2)^2}{-2\,\text{व}} \text{(चलनकलन से)}$$

इसलिये $\text{शा} = \frac{(1 + \text{प}^2)^2}{\text{व}}$ यहाँ शा के मान में केवल प और व हैं

इसलिये २७३ वें प्रक्रम से $\text{ताशा} = \text{पाताप} + \text{बाताब}$

$$\text{और } \frac{\text{ता}^2\text{वा}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = 0 \;\therefore\; \text{पा} = \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} - \text{गा}_1$$

$$\text{इसलिये ताशा} = \frac{\text{ता बा ता प}}{\text{ताय}} + \text{ताप गा}_1 + \text{बाताब}$$

$$= \text{तावाब} + \text{बाताब} + \text{तापगा}_1$$

$$\text{इसलिये शा} = \text{बा ब} + \text{प गा}_1 + \text{गा}_2 = \frac{(1 + \text{प}^2)^2}{\text{व}} \quad \cdots\cdots \quad (१)$$

जहाँ $गा_१$ और $गा_२$ कोई स्थिराङ्क हैं ।

परन्तु $शा = \frac{(१+प^२)^२}{व}$ $\therefore$ $ता\ शा = \frac{४\ प(१+प^२)\ ताप}{व} - \frac{(१+प^२)^२}{व^२}\ ताव$

इसलिये २७३ वें प्रक्रम से $वा = -\frac{(१+प^२)^२}{व^२}$ इसका उत्थापन (१) में देने

से $\frac{(१+प^२)^२}{व} = -\frac{(१+प^२)^२}{व^२} व + प\ गा_१ + गा_२$

इसलिये $\frac{व(गा_१\ प + गा_२)}{(१+प^२)^२} = २$

चलानयन से

$$गा_२\ स्प^{-१}\ प + \frac{गा_२\ प - गा_१}{(१+प^२)} = ४\ य + गा_३, \cdots \cdots (२)$$

और $\frac{व\ (गा_१\ प^२ + गा_२\ प)}{(१+प^२)^२} = २\ प$

चलानयन से

$$गा_१\ स्प^{-१}\ प - \frac{प \times गा_१ + गा_२}{१+प^२} = ४\ र + स्थिराङ्क$$

इसमें $गा_२$ जोड़ देने से

$$गा_१ स्प^{-१}\ प + \frac{प(गा_२प - गा_१)}{१+प^२} = ४\ र + गा_४, \cdots \cdots (३)$$

(२) और (३) से $स्प^{-१}\ प$ को लोप कर देने से

$$\frac{(गा_२प - गा_१)^२}{(१+प^२)} = ४\ गा_२\ र - ४\ गा_१\ य + गा_२\ गा_४ - गा_१\ गा_३$$

इस लिये $\sqrt{(१+प^२)} = \frac{गा_२प - गा_१}{२\sqrt{(गा_२\ र - गा_१य + का)}}$

जहां $४\ का = गा_२\ गा_४ - गा_१\ गा_३$

कल्पना करो कि एक स्थिर विन्दु से गणना करने से वक्र के चाप का प्रमाण चा है तो चलानयन से $चा + गा = \sqrt{(गा_२\ र - गा_१\ य + का)} \cdots (४)$

मूल विन्दु और अक्षों के परिवर्त्तन से (४) का रूप

$चा = \sqrt{८अय} + स्थिराङ्क$ ऐसा हो सकता है जो कि ७१ वें प्रक्रम से चक्राभास का समीकरण है ।

(५) आकाश में दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर क्या होगा ।

दोनों विन्दुओं का अन्तर चा मानो तो

$ताचा = \sqrt{\{ताय^२ + तार^२ + ताल^२\}} = स$

इस लिये २७२ वें प्रक्रम से खण्ड तात्कालिकी गति पर से

$\frac{तास}{ताय} = \frac{ता^२य\ ताय}{स} = \frac{ताय}{स}$ ता ताय, $\frac{तास}{तार} = \frac{तार}{स}$ ता तार और $\frac{तास}{ताल} = \frac{ताल}{स}$ ता ताल

इस लिये $वै \int स = \int वैस = \int वैताचा = \int \frac{ताय}{ताचा} वैताय + \int \frac{तार}{ताचा} वैतार + \int \frac{ताल}{ताचा} वै ताल$

$= \frac{ताय}{ताचा} वैय + \frac{र}{ताचा} वैर + \frac{ताल}{ताचा} वैल - \int \{ ता\left(\frac{ताय}{ताचा}\right) वैय - ता\left(\frac{तार}{ताचा}\right) वैर + ता\left(\frac{ताल}{ताचा}\right) वैल$

इस लिये मा = ०, म = ० मं‍ा = ०, (क्योंकि न्यूनतम मान में सब पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे)

$ना = \frac{ताय}{ताचा},\ न = \frac{तार}{ताचा},\ नं‍ा = \frac{ताल}{ताचा},\ ताना = ० = तान = तानं‍ा$

$\therefore \frac{ताय}{ताचा} = अ,\ \frac{तार}{ताचा} = क,\ \frac{ताल}{ताचा} = ग,$

और $\frac{ताय^२}{ताचा^२} + \frac{तार^२}{ताचा^२} + \frac{ताल^२}{ताचा^२} = १ = अ^२ + क^२ + ग^२$

और $\frac{ताय}{ताल} = \frac{अ}{ग},\ \frac{तार}{ताल} = \frac{क}{ग}\ \therefore य = \frac{अ}{ग} ल + गं',\ र = \frac{क}{ग} ल + गं''$

यह इष्ट धरातल में एक सरल रेखा को पतित करने से जो सरलरेखा होती है उसका समीकरण है।

(६) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण दिया है उसके पृष्ठ पर दिये हुए दो विन्दुओं के बीच में परमाल्प रेखा का प्रमाण क्या होगा।

कल्पना करो कि दिये हुए पृष्ठ के समीकरण पर से

ताल = प ताय + बा तार ऐसा समीकरण बनता है जहां प, और ब, य, र के फल हैं। तो वैल = प वै य + ब वैर ऐसा होगा इसका उत्थापन (५) वें उदाहरण में देने से

$वै \int ताचा = \left[\frac{ताय}{ताचा} + प \frac{ताल}{ताचा}\right] वैय + \left[\frac{तार}{ताचा} + ब \frac{ताल}{ताचा}\right] वैर$

$$— \int \left\{ \left[ता \frac{ताय}{ताचा} + प ता \frac{ताल}{ताचा} \right] वैय + \left[ता \frac{तार}{ताचा} + ब ता \frac{ताल}{ताचा} \right] वैर \right\}$$

इसलिये परमाल्प अन्तर में

$$ता \left[\frac{ताय}{ताचा} \right] + प ता \left[\frac{ताल}{ताचा} \right] = ०, \text{ और } ता \frac{तार}{ताचा} + ब ता \left[\frac{ताल}{ताचा} \right] = ० \quad (१)$$

पृष्ठ के समीकरण पर से प और ब का मान निकाल फिर जो रेखा परमाल्प अन्तर रूप होगी उसका समीकरण (१) के बल से निकाल सकते हो। जैसे

यदि पृष्ठ का समीकरण $ल = फ (य^२ + र^२)$ ऐसा हो तो

यहाँ $प = २ य फ' (य^२ + र^२)$, $ब = २र फ'(य^२ + र^२)$ और मान लो कि चा स्वतन्त्र राशि है तो (१) से

$$\frac{ता^२य}{ताचा^२} + प \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = \frac{ता^२य}{ताचा^२} + २ यफ'(य^२ + र^२) \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = ०, \cdots\cdots (२)$$

$$\frac{ता^२र}{ताचा^२} + ब \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = \frac{ता^२य}{ताचा^२} + २र फ'(य^२ + र^२) \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = ०, \cdots\cdots (३)$$

(२) को र से और (३) को य से गुण कर अन्तर करने से

$$र \frac{ता^२य}{ताचा^२} = य \frac{ता^२र}{ताचा^२}$$ यहाँ यदि $श्रु^२ = य^२ + र^२$ और $प = कोज्या^{-१} \frac{य}{श्रु}$

तो $र ता^२य — य ता^२र = ता(श्रु^२ ताष) = ०$

$$\therefore श्रु^२ \frac{ताष}{ताचा} = स्थिराङ्क = ग \text{ और } श्रु \cdot \frac{ताष}{ताचा} = \frac{ग}{श्रु}$$

परन्तु $श्रु \frac{ताष}{ताचा}$ यह उस कोण की ज्या है जो कि परमाल्प रेखा उस वक्र को काटकर उत्पन्न करती है जो वक्र कि स्वयं घूम कर घन का पृष्ठ बनाया है। इसलिये इस कोण को यदि भ कहो तो

$$ज्याभ = \frac{ग}{श्रु} = \frac{ग}{\sqrt{(य^२+र^२)}} ।$$

अथवा जब $श्रु^२ \frac{ताष}{ताचा} = ग$ इसलिये

$$श्रु^४ \frac{ताष^२}{ताश्रु^२} = ग^२ \frac{ताचा^२}{ताश्रु^२} = ग^२ \left(१ + श्रु^२ \frac{ताष^२}{ताश्रु^२} + \frac{ताल^२}{ताश्रु^२}\right)$$

(७५ वाँ और ९८ वाँ प्रक्रम देखो)

समशोधन से $श्रु^२ (श्रु^२ — ग^२) \frac{ताप^२}{ताश्रु^२} = ग^२ [१ + फ' \{ र^२ \}$

इसलिये $\frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}} \sqrt{\left\{ \frac{१ + \text{फ}^{\prime}(\text{र}^{२})}{\text{श्रु}^{२} - \text{ग}^{२}} \right\}}$ .. .. .. (४)

कल्पना करो कि घनक्षेत्र गोल है और यह याम्योत्तर वृत्त के घूमने से बना है प्राक् कपाल में क्षितिज के ऊपर कहीं रविकेन्द्र और चन्द्रकेन्द्र दो दत्त विन्दु हैं इन दोनों के भीतर गोलपृष्ठ पर परमाल्प रेखा खींचना है। कल्पना करो कि परमाल्प रेखा याम्योत्तर वृत्त के साथ भ कोण बनाती है।

ल अक्ष गोल में जहाँ लगा है वहाँ से परमाल्प रेखा और याम्योत्तर वृत्त के सम्पात तक एक महद्वृत्त अ अंश, और गोल का व्यासार्द्ध त्रि तो यहाँ यदि त्रिकोणमिति से १ व्यासार्द्ध में जैसा कि सर्वत्र इस ग्रन्थ भर में है ज्यासाधन करो तो श्रु = त्रिज्याअ,

और ऊपर की युक्ति से ज्याभ $= \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}} = \frac{\text{ग}}{\text{त्रिज्याअ}}$ $\therefore$ ज्याभ × ज्याअ $= \frac{\text{ग}}{\text{त्रि}}$

अर्थात् दोनों जीवाओं का घात सर्वदा स्थिर है जो कि महद्वृत्त में धर्म पाया जाता है इसलिये दोनों विन्दुओं में होकर जो महद्वृत्त जायगा उसमें दोनों विन्दुओं के भीतर जो चाप होगा वही परमाल्प अन्तर होगा।

२७४। बहुत से प्रश्न ऐसे हैं जिन्हें कि साम्वन्धिक महत्तम और न्यूनतम कहते हैं। समझो कि दो सीमाओं के भीतर किसी फल का चलानयन करने से ऐसा मान $\int$स जानना है जो महत्तम वा न्यूनतम हो इस नियम से कि उन्हीं चलराशिओं के दूसरे फल का उन्हीं सीमाओं के भीतर चलमान $\int$स$_{१}$ एक दिये हुए स्थिर संख्या के तुल्य हो। जैसे वक्र के परिधि का मान स्थिर ग के तुल्य हो और फल महत्तम हो इस नियम से पता लगावो कि कौन सा वक्र है।

ऐसे प्रश्नों के उत्तर करने में $\int$स$_{१}$ को एक स्थिर संख्या अ से गुण कर $\int$स में जोड़ देते हैं फिर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करते हैं क्योंकि महत्तम वा न्यूनतम मान में

वै ($\int$ स + अ $\int$ स$_{१}$) ताय = वै $\int$ सताय + अ वै $\int$ स$_{१}$ ताय = ० + ०

क्योंकि प्रश्न के अनुसार $\int$ सताय यह महत्तम वा न्यूनतम है इसलिये

वै $\int$ सताय $= 0$ और $\int$ स_1 ताय=ग=स्थिराङ्क इसलिये वै $\int$ स_1 ताय=० । इसी तरह प्रश्न में यदि यह नियम हो कि $\int$ सताय महत्तम वा न्यूनतम और $\int$ स_1ताय और $\int$ स_2ताय स्थिराङ्क तो $\int$ स_2ताय को दूसरे स्थिराङ्क क से गुण कर ऊपर के योग में जोड़ कर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करो अर्थात् वै $\left\{ \int \text{सताय} + \text{अ} \int \text{स}_1\text{ताय} + \text{क} \int \text{स}_2\text{ताय} \right\} = 0$ फिर प्रश्न के वश से अ,क स्थिराङ्क का ज्ञान भी हो जायगा ।

(१) उदाहरण । बहुत से वक्र हैं जिन सभों का परिधि मान स्थिर ग के तुल्य है तो बतावो कि किस का क्षेत्रफल सबसे बड़ा होगा ।

यहां प्रश्न की बोली से $\int \text{स}_1\text{ताय} = \int \sqrt{(1 + \text{य}^2)}\text{ताय} = \text{ग},$

$\int \text{स ताय} = \int \text{र ताय}$

इस लिये $\int \text{शा ताय} = \int \left\{ \text{र} + \text{अ}\sqrt{(1 + \text{प}^2)} \right\} \text{ताय}$ और

$\text{शा} = \text{र} + \text{अ}\sqrt{(1 + \text{प}^2)}$ फिर २७३ वें प्रक्रम और २७५ वें प्रक्रम से

$\text{ताशा} = \text{तार} + \dfrac{\text{अप}}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}}$ ताय और, $\text{ना} = 1$ $\text{पा} = \dfrac{\text{अप}}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}}$ वा $= 0$

इस लिये $\text{शा} = \text{पाप} + \text{स्थि}$ और $\text{र} + \text{अ}\sqrt{(1 + \text{प}^2)} = \dfrac{\text{अप}^2}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}} + \text{ग}_1$

समशोधन से $\text{र} - \text{ग}_1 = - \dfrac{\text{अ}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}}$ इस लिये $\text{प} = \dfrac{\sqrt{\left\{ \text{अ}^2 - (\text{र} - \text{ग}_1)^2 \right\}}}{\text{र} - \text{ग}_1} = \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}$

और $\text{ताय} = \dfrac{(\text{र} - \text{ग}_1)\ \text{तार}}{\sqrt{\left\{ \text{अ}^2 - (\text{र} - \text{ग}_1)^2 \right\}}}$ चलानयन से

$\text{य} - \text{ग}_2 = - \sqrt{\left\{ \text{अ}^2 - (\text{र} - \text{ग}_1)^2 \right\}}$

इस लिये $(\text{य} - \text{ग}_2)^2 + (\text{र} - \text{ग}_1)^2 = \text{अ}^2$ परन्तु यह वृत्त का समीकरण है इस लिये सब से बड़ा वृत्त फल का होगा ।

यह प्रश्न और २७५ प्रक्रम का (२) प्रश्न दोनों सन् १६९६ ई० में जान वर्नली (John Bernoulli) के निकाले हुए हैं और जान वर्नली ने इन के उत्तर को भी वैशेषिक कलन की रीति से निकाला । वैशेषिककलन के प्रचार के जड़ भी यही दोनों प्रश्न हैं ।

२७५ प्रक्रम का (२) जो प्रश्न है उसे ऐसे भी कह सकते हो कि एक ऐसी पतली कांच की टेढ़ी पोली नली जिसके दोनों शिरे खुले हों बनावो जिसके ऊपर के शिरे पर यदि एक गुरु परमाणु पदार्थ छोड़ दें तो वह परमाल्प काल में नीचे के शिरे पर पहुँच जाय।

इस प्रश्न को अङ्गरेज़ी में ब्याचिस्टोक्रोन प्रश्न का (Problem of the brachistochrone) कहते हैं।

(२) उदाहरण। य अक्ष के चारो ओर एक वक्र को घुमाकर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाया चाहते हैं जो य अक्षगत नियत दो विन्दुओं पर जाय और जिस का पृष्ठफल स्थिर ग के तुल्य और घनफल महत्तम हो तो उस वक्र का समीकरण बतावो।

यहां पृष्ठफल $= २\pi \int र\sqrt{(१+प^२)}\,ताय = ग$ और घनफल $= \pi \int र^२ ताय$

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\pi \int र^२ ताय + २\,\pi\, अ \int र\sqrt{(१+प^२)}\,ताय \text{ यह}$$

$$\text{वा} \quad \int र^२ ताय + २\,अ \int र\sqrt{(१+प^२)}\,ताय = \int शाताय$$

यह महत्तम होगा

इस लिये $शा = र^२ + २अ\, र\sqrt{(१+प^२)}$ और

$$ताशा = २\,र\,तार + २\,अतार\sqrt{(१+प)^२} + \frac{२\,अ\,र\,प}{\sqrt{(१+प^२)}}\,ताय$$

इस लिये $मा = ०,\ ना = २र + २\,अ\sqrt{(१+प^२)}$ और $पा = \dfrac{२\,अ\,र\,प}{\sqrt{(१+प^२)}}$

इस लिये $मा = ०,\ ना = २र + २अ\sqrt{(१+प^२)}$ और $पा = \dfrac{२अरप}{\sqrt{(१+प^२)}}$

इस लिये $शा = पा \times प + स्थि = \dfrac{२अरप^२}{\sqrt{(१+प^२)}} + ग_१$

$$= र^२ + २अर\sqrt{(१+प^२)}$$

$$ग_१ - र^२ = २अर\left\{\sqrt{(१+प^२)} - \frac{प^२}{\sqrt{(१+प^२)}}\right\} = \frac{२अर}{\sqrt{(१+प^२)}} \cdots \quad (१)$$

यहां प्रश्न के अनुसार वक्र य अक्ष को दो विन्दुओं पर काटता है इस लिये उन स्थानों में $र = ०$ इस का उत्थापन (१) में देने से $ग_१ = ०$ इस लिये

$$\frac{२अर}{\sqrt{(१+प^२)}}+र^२=र\left\{र+\frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}}\right\}=०$$

इस में यदि $र+\frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}}=०$ तो $\frac{४अ^२}{१+प^२}=र^२$

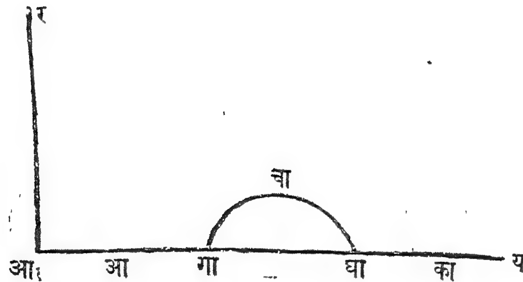
$\therefore प^२+१=\frac{४अ^२}{र^२}$ इसलिये $प=\frac{\sqrt{४अ^२-र^२}}{र}=\frac{तार}{ताय}$

इसलिये $\frac{र}{\sqrt{(४अ^२-र^२)}}=\frac{ताय}{तार}\;\therefore\;\frac{र\,तार}{\sqrt{(४अ^२-र^२)}}=ताय$

$-\sqrt{(४अ^२-र^२)}=य-ग_२\;\therefore\;र^२+(य-ग_२)^२=४\,अ^२$

यह एक वृत्त का समीकरण है जिस का केन्द्र य अक्ष पर और व्यासार्द्ध $=-२अ$ है।

कल्पना करो कि य अक्ष में आ, और का विन्दु नियत हैं जिनके ऊपर हो कर प्रश्न के अनुसार वक्र को जाना चाहिये। तो यदि आ, का के व्यास मान कर एक गोल वनाया जाय और प्रश्न में दिया हुआ स्थिर पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बरावर हो तो इस गोल में प्रश्नोक्त सब आलाप घट जायँगे परन्तु यदि दिया हुआ पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बरावर न हो किन्तु य अक्ष में गा, और घा विन्दु जो हैं उन के अन्तर को व्यास मान कर जो गोल होगा उसके पृष्ठफल के बरावर हो तो ऐसी स्थिति में ऐसा समझना चाहिये कि आग, य अक्ष का भाग, गाघा व्यास पर वना गाचाघा वृत्तार्द्ध और य अक्ष का घाका भाग इन तीनों को एक में मिला देने से आगाचाघा का यह जो आ और का दो नियत विन्दुओं पर गया हुआ यर धरातल में एक वक्र है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से अभीष्ट घनक्षेत्र होगा जिसका पृष्ठफल दिये हुए पृष्ठफल के समान और घनफल महत्तम होगा।



इसी तरह यदि आका से गाघा बड़ा हो तो भी समझ लेना चाहिये। ऊपर का समीकरण भी दिखलाता है कि जब $र\left\{र+\frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}}\right\}=०$ तो $र=०$ यह भी एक वक्र का समीकरण होगा जो कि यहां पर आगा और घाका सरल रेखा के समान होगा।

इस प्रकार से बुद्धिमान को चाहिये कि इस ग्रन्थ में दिखलाये गये जो सिद्धान्त हैं उनके अभ्यास से नाना प्रकार की कल्पना अपने बुद्धिबल से करे।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\text{२अकोज्याष}} \text{फ(श्रु,ष) श्रु ताश्रुताष}$ इसमें क्रम को बदलो

उत्तर $\int_{0}^{\text{२अ}} \int_{0}^{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{२अ}}} \text{फ (श्रु,ष) श्रुताषतार}$

२। $\int_{0}^{\text{१}} \int_{\text{य}}^{\text{य(२−य)}} \text{फ(य,र) तार ताय}$ इसमें क्रम को बदल देना है।

उ० $\int_{0}^{\text{१}} \int_{\text{१}-\sqrt{(\text{१}-\text{र})}}^{\text{र}} \text{फ (य,र) ताय तार}$

३। $\int_{0}^{\text{२अ}} \int_{\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\text{४अ}}}^{\text{३अ−य}} \text{फ(य,र) तार ताय}$ इसमें क्रम को बदलना है।

उ० $\int_{0}^{\text{अ}} \int_{0}^{\text{२}\sqrt{(\text{अर})}} \text{फ(य,र) ताय तार} + \int_{\text{अ}}^{\text{३अ}} \int_{0}^{\text{३अ−र}} \text{फ(य,र) ताय तार}$

४। $\int_{0}^{\text{अ}} \int_{\sqrt{(\text{अ}^{\text{२}}-\text{य}^{\text{२}})}}^{\text{य+२अ}} \text{फ(य,र) तार ताय}$ इसका क्रम बदलने से कैसा रूप होगा।

उ० $\int_{0}^{\text{अ}} \int_{\sqrt{(\text{अ}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}})}}^{\text{अ}} \text{फ(य,र) ताय तार} + \int_{\text{अ}}^{\text{२अ}} \int_{0}^{\text{अ}} \text{फ(य,र) तायतार}$

$$+ \int_{\text{२अ}}^{\text{३अ}} \int_{\text{र−२अ}}^{\text{अ}} \text{फ(य,र) ताय तार}$$

५। यदि य = अज्याष$_{\text{१}}$ज्याष, और र = क कोज्याष$_{\text{१}}$ज्याष

तो सिद्ध करो कि बदलने से $\int\int$ तार ताय इस द्विगुण चल का

$\pm\int\int$ अक ज्याष$_{\text{१}}$ कोज्याष$_{\text{१}}$ ताष ताष$_{\text{१}}$ ऐसा रूप होगा।

६। यदि य = वज्याअ$_{\text{१}}$ + श कोज्याअ$_{\text{१}}$

और र = वकोज्याअ$_{\text{१}}$ — शज्याअ$_{\text{१}}$ तो सिद्ध करो कि

$$\iint फ(य,र)\,\frac{तार\ ताय}{\sqrt{(१-य^2-र^2)}} = \iint फ_1\,(व,श)\,\frac{ताश\ ताव}{\sqrt{(१-व^2-श^2)}}$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_0^\infty\int_0^\infty फ(अ^2य^2+क^2र^2)\ तार\ ताय = \frac{\pi}{४अक}\int_0^\infty फ(य) ताय$$

८। $\iint इ^{-(य^2+२यरकोज्याअ_1+र^2)}$ तार ताय इसको अक्षीय भुजयुग्म के रूप में बदलो और तब दिखलावो कि यदि य और र की सीमा ० और ∞ हों तो द्विगुण चल का मान $\frac{अ_1}{२ज्याअ_1}$ होगा।

९। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{अ}\int_0^{क}\frac{तार\ ताय}{(ग^2+य^2+र^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{१}{ग}\ स्प^{-1}\frac{अक}{ग\sqrt{(अ^2+क^2+ग^2)}}$$

१०। अक्षीय भुजयुग्म के रूप में बदल कर सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{अ\ तार\ ताय}{(य^2+र^2+अ^2)^{\frac{3}{2}}(य^2+र^2+अ'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{२\pi}{अ+अ'}$$

११। यदि य = श्रुकोज्याष + अज्याष और र = श्रुज्याष + अकोज्याष तो $\iint$ फ(य,र) तार ताय इसको बदलने से कैसा रूप होगा।

उ० $\iint$ फ(श्रुकोज्याष + अज्याष, श्रुज्याष + अकोज्याष) (अज्या२ष−श्रु)ताश्रुताष

१२। सिद्ध करो कि $\iint\frac{\sqrt{(१-य^2-र^2)}}{\sqrt{(१+य^2+र^2)}}$ तार ताय $=\frac{\pi}{४}\left(\frac{\pi}{२}-१\right)$

यहां चलानयन य, और र के सब धनमानों के भीतर किया गया है और $य^2+र^2 \angle १$ ।

१३। सिद्ध करो कि

$$\iiint\cdots\frac{ताय\ तार\ ताल\cdots}{\sqrt{(१-य^2-र^2-ल^2-\cdots)}} = \frac{\pi^{\frac{न+१}{२}}}{२^{न}गा\left(\frac{न+१}{२}\right)}$$

जहां चलराशियों की संख्या न है और चलानयन सब धन मान के भीतर किया गया है जो कि $य^2+र^2+ल^2+\cdots \angle १$ इस नियम से सिद्ध होते हैं।

१४ । सिद्ध करो कि

$$ज्या \frac{१}{२} य = \frac{८}{\pi} \left(\frac{ज्याय}{२^२ - १} - \frac{२ज्या२य}{२^२.२^२-१} + \frac{३ज्या३य}{२^२.३^२-१} - \frac{४ज्या४य}{२^२.४^२-१} + \cdots \right)$$

१५ । सिद्ध करो कि

$$कोज्या \ \frac{१}{२}य = \frac{८}{\pi} \left\{ १ + \frac{१}{२} \frac{कोज्याय}{२^२-१} - \frac{१}{२} \frac{कोज्या२य}{२^२.२^२-१} + \cdots \right\}$$

१६ । एक मनुष्य से ३० हाथ के अन्तर पर दक्षिण ओर उस का पोसा तीतर था जैसे ही मनुष्य पूर्व की ओर चलने लगा वैसे ही तीतर भी मनुष्य के पास पहुंचने के लिये चला तो बतावो कि प्रथम स्थान से पूर्व की ओर कितनी दूरी पर मनुष्य और तीतर से भेंट हुई। इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि प्रतिक्षण में मनुष्य से दूना तीतर चलता था ।

उ० २० हाथ ।

१७। सौ हाथ ऊँचे एक तालवृक्ष के ऊपर एक कौआ बैठा था उसने पेड़ की जड़ से दक्षिण ओर २५ हाथ के अन्तर पर दक्षिण ही की ओर जाता एक मूसे को देख कर उसकी दूनी गति से पकड़ने के लिये झपटा तो बतावो कि पेड़ की जड़ से कितने हाथ पर कौअे ने मूसे को पकड़ा ।

उ० १८३ $\frac{१}{३}$ हाथ ।

१८। पृथ्वी से १०,००० हाथ उँचे पर जा कर एक कबूतर ने पृथ्वी पर ठीक अपने पैर के नीचे चावलों को देख कर एक पल में २०० हाथ की गति से उतरने लगा परन्तु उस समय पूर्व की वायु एक चाल से बहती थी जिसके कारण एक पल की गति कबूतर की पूर्व की ओर भी १०० हाथ हो गई तो बतावो कि कितने पल में वह कबूतर पृथ्वी पर पहुँचा ।

उ० ६६$\frac{२}{३}$ पल

१९। २६७ प्रक्रम के (६) वें प्रश्न में मोर और सांप के योग से वक्र त्रिबाहु होगा उसका क्षेत्रफल क्या होगा । उ०, फल = $\frac{(२ इ^२ क - इ_१ग) अ}{४गु^२ - १}$

२०। १६ वें प्रश्न में मनुष्य और तीतर के योग से जो वक्र त्रिबाहु होगा उसका फल क्या होगा । उ० फल = १२०

२१। १७ वें प्रश्न में काक और मूस के योग से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल बतावो । उ० फल = $\frac{कोटि (२ गु^२ \times भुज + गु \times कर्ण)}{४ गु^२ - २}$

$$\text{यहां } गु = \frac{\text{काक गति}}{\text{मूस की गति}}$$

२२। १८ वें प्रश्न में कपोत जिस वक्र में पृथ्वी पर उतरेगा उससे और कपोत की उँचाई १०,००० से जो चापक्षेत्र होगा उसका क्या फल होगा।

$$\text{उ० फल} = \frac{२(१०,०००)^२}{३}$$

२३। एक वक्र ऐसा बतावो जिसमे $\int \frac{प^२ र}{१ + प^२}$ ताय इसका मान न्यूनतम हो।

$$\text{उ० } र = \frac{ग(१ + प^२)^२}{प^३},\ य = ग_१ + ग\left(\frac{३}{४प^४} + \frac{१ + प^२}{प^२} + \text{ला } प\right)$$

२४। जिस सूच्याकार शङ्कु के पृष्ठ का $ल = इ\sqrt{(य^२ + र^२)} = इ\ ध्रु$ यह समीकरण है उसके पृष्ठ पर दो दिये हुए विन्दुओं के बीच में जो परमाल्प रेखा होगी उसका समीकरण बतावो। उ० $ध्रु = गछे\left\{\frac{प + ग_१}{\sqrt{(१ + इ^२)}}\right\}$

२५। वक्र का चाप और फल स्थिर है और यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका घनफल महत्तम है तो वक्र का पता लगावो। उ० यहां $शा = \pi र^२ + कर + अ\sqrt{(१ + प^२)}$ ऐसा होगा फिर इस पर से २७६ प्रक्रम की क्रिया कर वक्र का समीकरण जानो।

२६। सब वक्रों में क्षेत्रफल स्थिर है तो बतावो किसकी परिधि सब से छोटी होगी। उ० वृत्त की।

२७। वक्र का चाप स्थिर है और यह य अक्ष के चारो ओर घूम कर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका न्यूनतम पृष्ठफल है तो बतावो वह कौन सा वक्र है। उ० कातन्वली (Catenary)

२८। एक नींब में जड़ से दो शाखा फूटी थीं जिन का झुकाव ३०° था। पहली शाखा पर जड़ से ८ हाथ के अन्तर पर एक मैना बैठी थी और दूसरी शाखा पर जड़ से $३ + ४\sqrt{३}$ हाथ के अन्तर पर एक कीड़ा बैठा था। यह जैसे ही शाखा के ऊपर की ओर चलने लगा वैसे ही इस पर मैना झपटी तो बतावो कि पहले स्थान से कितनी दूर जाने पर मैना ने उस कीड़े को पकड़ लिया। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि कीड़े से मैना दूनी चलती थी।

उ० $४\frac{१}{३}$ हाथ

२९। एक महाजन ने एक ज्यौतिषी से प्रसन्न होकर कहा कि कल आप एक पीतर का डब्बा किसी से बनवा कर लेते आइयेगा जो कि ठीक मेरी रूमाल से चारो ओर बंध जाय तो मैं उस डब्बे को अशर्फ़ियों से भर कर आपको सङ्कल्प करूँगा । बतावो ज्यौतिषी कैसा डब्बा बनावे जिसमें उसे बहुत अशर्फ़ियां मिलें । इतना यहां पर हम जानते हैं कि उस धनी के रूमाल की लम्बाई साढ़ेपांच हाथ और चौड़ाई पौने दो हाथ थी ।

उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{22}{7}$ हो तो पौने दो हाथ के व्यास का जो एक गोलाकार डब्बा बनेगा उस में सबसे अधिक अशर्फ़ियां भरेंगी ।

हरिगीत

रखि हैं कृपालुद्विवेदिसुतकृत सुकृतिजन मन लाय के ।
चलराशिकलन वरासि कल नवराशि चरम मिलाय के ॥
धरि शान जौं बुद्धिबल गरवदलि सकल खलहि हिलाय के ।
धन धान मान महान लहि हैं होय प्रिय नृप राय के ॥

इतिश्रीकृपालुदत्तसुतश्रीसुधाकरद्विवेदिकृतं चलराशिकलनं सम्पूर्णम् ॥

सित सावन शनि तेरस बरस विरोधि ।
पूरन कियेउ सुधाकर सब विधि शोधि ॥

